

# الهندسة الريمانية

دليل المبتدئين

تأليف  
Frank Morgan

ترجمة  
د. ناصر بن إبراهيم التركي

دار جامعة  
الملك سعود للنشر  
KING SAUD UNIVERSITY PRESS



<https://ksupress.ksu.edu.sa>



ISBN 978-603-507-844-3



الهندسة الريمانية

دليل المبتدئين

تأليف  
Frank Morgan

ترجمة  
د. ناصر بن إبراهيم التركي

يعرض هذا الكتاب المفاهيم الرئيسة في الهندسة الريمانية. ومن أجل التغلب على صعوبة فهم الصيغ المعقدة للهندسة الريمانية، يبدأ الكتاب بالانحناء وهو من أهم المفاهيم في الهندسة التفاضلية وأيضاً الكتاب في بدايته يدرس المنحنيات والسطوح ذات البعد الثاني في  $\mathbb{R}^3$  و  $\mathbb{R}^n$ . يعرف الانحناء في الهندسة على أنه قياس مقدار الانحراف في الشكل الهندسي. ثم يتوسع الكتاب بعد ذلك في دراسة السطوح ذات البعد  $m$  في  $\mathbb{R}^n$ . كذلك يعرض الكتاب مقدمة في الهندسة الريمانية بدايةً من المنطوق الريماني. بعد ذلك يتم دراسة مواضيع أكثر تعقيداً وهي الهندسة الزائدية والهندسة العمومية وبعض النظريات في الهندسة الريمانية.







# الهندسة الريمانية

## دليل المبتدئين

تأليف

Framk Morgan

ترجمة

د. ناصر بن إبراهيم التركي

أستاذ مساعد - قسم الرياضيات

كلية العلوم - جامعة الملك سعود

دار جامعة  
الملك سعود للنشر  
KING SAUD UNIVERSITY PRESS



ص.ب ٦٨٩٥٣ - الرياض ١١٥٣٧ المملكة العربية السعودية

ح دار جامعة الملك سعود للنشر، ١٤٤١ هـ (٢٠٢٠ م)

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

مورغان، فرانك.

الهندسة الريمانية : دليل المبتدئين . / فرانك مورغان ؛ ناصر إبراهيم التركي - الرياض، ١٤٤١ هـ.

١٧٢ ص ؛ ١٧ سم × ٢٤ سم

ردمك : ٣ - ٨٤٤ - ٥٠٧ - ٦٠٣ - ٩٧٨

١- التفاضل والتكامل أ. التركي، ناصر إبراهيم (مترجم) ب العنوان

ديوي ٥١٥ ١٤٤١/٧٤١٩

رقم الإيداع : ١٤٣٩/٧٤١٩

ردمك : ٣ - ٨٤٤ - ٥٠٧ - ٦٠٣ - ٩٧٨

هذه ترجمة عربية محكمة صادرة عن مركز الترجمة بالجامعة لكتاب:

Riemannian Geometry: A Beginner's Guide

By: Frank Morgan

© Copyright 1998

وقد وافق المجلس العلمي على نشرها في اجتماعه الخامس عشر للعام ١٤٣٩ / ١٤٤٠ هـ

المعقود بتاريخ ٤ / ٧ / ١٤٤٠ هـ الموافق ١١ / ٣ / ٢٠١٩ م

جميع حقوق النشر محفوظة. لا يسمح بإعادة نشر أي جزء من الكتاب بأي شكل وبأي وسيلة سواء كانت إلكترونية أو آلية بما في ذلك التصوير والتسجيل أو الإدخال في أي نظام حفظ معلومات أو استعادتها بدون الحصول على موافقة كتابية من دار جامعة الملك سعود للنشر.



## مقدمة المترجم

الحمد لله رب العالمين، حمداً يليق بجلاله وكَماله، والصلاة والسلام على الهادي البشير والسراج المنير المبعوث رحمة للعالمين سيدنا محمد وعلى آله وأصحابه أجمعين، وبعد:

يعد هذا الكتاب من القلة في الهندسة التفاضلية وبالأخص هندسة ريمان، وبالتالي فإن هذا الكتاب يعتبر من الكتب النادرة التي بإذن الله سوف تثري المكتبة العربية في هذا المجال. حيث إنه من خلال البحث في مكتبة الملك سلمان وعدة مكاتب عربية أخرى تبين لي أنه يكاد ينعدم وجود كتاب في الهندسة الريمانية باللغة العربية.

يعتبر هذا الكتاب مرجعاً جيداً في دراسة الطالب لمقرر الهندسة الريمانية، ويتميز في تقديمه للأمثلة والتمارين بطريقة واضحة تساعد الطالب على فهم الموضوع. إضافة لاحتوائه على الرسومات والأشكال الهندسية التي تساعد في توضيح المفهوم الهندسي والرياضي للقارئ. كما يعتبر الكتاب مرجعاً لطلاب البكالوريوس والدراسات العليا في الرياضيات والمتخصصين في فرع الهندسة والتبولوجي، وذلك حيث إن الكتاب يساعد الطالب في بناء أرضية علمية قوية في هندسة ريمان.

يعرض هذا الكتاب المفهوم الرئيس في الهندسة الريمانية وهو الانحناء. حيث إن الانحناء من أهم المفاهيم في الهندسة التفاضلية والمقصود بالانحناء هو قياس مقدار الانحراف في الشكل الهندسي. يشمل الكتاب دراسة السطوح ذات البعد الثنائي في  $\mathbb{R}^3$  و  $\mathbb{R}^n$ ، السطوح ذات البعد  $m$  في  $\mathbb{R}^n$ . كذلك تم عرض مقدمة في الهندسة الريمانية بدايةً من المنطوق الريماني. بعد ذلك يقدم الكتاب بعض النظريات في هندسة ريمان.

يتكون الكتاب من عشرة فصول جاءت كما يلي:

### الفصل الثاني: المنحنيات في $\mathbb{R}^n$

يحتوي هذا الفصل على تعريف المنحنى في الفضاء، والمنحنيات المنتظمة وتغيير البارامتر، والسرعة، والتسارع والانحناء. حيث تم دراسة أهمية مفهوم الانحناء للمنحنى وذلك من خلال حل مشكلة المدخنة. حيث إن المنحنى المستخدم في المدخنة هو المنحنى اللولبي والمشكلة كانت ما هو نصف القطر المناسب للمنحنى مقارنة بارتفاعه.

### الفصل الثالث: السطوح في $\mathbb{R}^3$

يقدم هذا الفصل تعريف السطوح في  $\mathbb{R}^3$ ، والانحناء للسطوح القابلة للاشتقاق مرتين، والمماس المستوى لسطح، والصيغة الأساسية الأولى والصيغة الأساسية الثانية. وتعريف الانحناءات الأساسية وانحناء جاوس والانحناء الوسيط. كذلك يحتوي الفصل على نظرية لإيجاد مساحة السطوح، ونظرية جاوس إغريغوم.

### الفصل الرابع: السطوح في $\mathbb{R}^n$

يعتبر هذا الفصل تعميماً للفصل السابق حيث إنه تم تعميم دراسة السطوح من  $\mathbb{R}^3$  إلى  $\mathbb{R}^n$ .

### الفصل الخامس: السطوح ذات البعد $m$ في $\mathbb{R}^n$

يتناول السطوح ذات البعد  $m$  في  $\mathbb{R}^n$ ، من حيث تعريفها ودراسة الانحناء. حيث يُعرف التانسور الأساسي الثاني، ومتجه الانحناء الوسيط، وتانسور انحناء ريمان، وانحناء ريتشي، والمشتقة المتغايرة.

### الفصل السادس: هندسة ريمان الداخلية

يقدم هذا الفصل بعض الصيغ والمعادلات الرياضية للهندسة الريمانية، ومنطو ريماني، وانحناء ريمان، المنحنيات الجيوديسية، ونظرية للمنحنى المنتظم، وبعض الصيغ للجيووديسك، والهندسة الزائدية، والطارة(الدونات).

## الفصل السابع: النسبية العامة

مقدمة لنظرية النسبية العامة، والنسبية الخاصة، وفراغ شوارزشيلد، وفراغ لورينتز.

## الفصل الثامن: نظرية جاوس وبونيه

تعتبر هذه النظرية من أهم النظريات في الرياضيات حيث تربط الهندسة بالتوبولوجي. حيث يحتوي هذا الفصل على بعض الصيغ الخاصة بجاوس وبونيه، نظرية جاوس وبونيه، تطبيق جاوس للسطوح في  $\mathbb{R}^3$ ، تطبيق جاوس للسطوح الزائدية، إثبات نظرية جوس بونيت في  $\mathbb{R}^3$ .

## الفصل التاسع: الجيوديسي والهندسة العمومية

يتناول هذا الفصل تعميم الجيودسيك وبعض النظريات في المنطو إلى جزء أكبر في المنطو. كذلك يحتوي على تعريف التطابق الأسّي، والانحناء للزمرة  $SO(n)$ ، والنقاط المزدوجة وحقل جاكوبي، ونظرية بونيه، ونظرية بونيه-ماريرس، والانحناء عندما يكون قيمة ثابتة، ونظرية الكورة في منطو ريمان، ونظرية المقارنة لراتش.

## الفصل العاشر: المعيار العام

في بداية الفصل يتناول الكاتب تعريف المقاييس، وتعميم الانحناءات للمنحنيات، ودراسة اتجاه المنحنى، وبلورات الأملاح المزدوجة، كذلك يتناول ذكر بعض النظريات الخاصة في قياس المنحنيات والانحناء والاتجاه للمنحنى.

وفي النهاية لا يسعني إلا أن أتقدم بالشكر والتقدير لمركز الترجمة في جامعة الملك سعود على دعمهم لمشروع ترجمة هذا الكتاب منذ أن كان فكرة ولحين الانتهاء من ترجمته وتحكيمة. ولعل هذا العمل يثري تخصص الهندسة التفاضلية في المملكة العربية السعودية والدول العربية، ويقدم إضافة مهمة لطلاب مرحلة البكالوريوس والدراسات العليا، حيث يقدم لهم العديد التعاريف والنظريات في الهندسة التفاضلية وبالأخص في هندسة ريمان.



وأسأل الله التوفيق والسداد، وأن يكون هذا العمل نافعاً وخالصاً لوجهه الكريم، إنه ولي ذلك والقادر عليه، وصلى الله وبارك على نبينا محمد وعلى آله وصحبه وسلم.

المترجم

د. ناصر ابراهيم التركي

كلية العلوم - قسم الرياضيات

## توهيد

تعرض الصيغ المركبة لهندسة ريمان جانباً مربعاً للطالب. يركّز هذا الكتاب الصغير على المفهوم الرئيس – التقوّس. إنّهُ يتناول هندسة ريمان بشكلٍ ميسّر، بناءً على السطوح في  $\mathbb{R}^n$  بدلاً من منطويات ريمان المجردة.

تأتي بعد ذلك الصيغ الجوهرية الأكثر تعقيداً. تتناول الفصول اللاحقة الهندسة الزائدية، والنسبية العامة، والهندسة العمومية، وبعض الأبحاث الحالية عن منحنيات تقليل الطاقة ومسألة المحيطات المتساوية. تثبت المبرهنات عند تقديمها الفكرة الرئيسة، وتُخفي التفاصيل التي قد تربك الطالب.

ألّف هذا الكتاب بناءً على مقررات الدراسات العليا التي قمتُ بتدريسها عن تحليل المُوتر في معهد ماساتشوستس للتكنولوجيا عام ١٩٧٧م، وعن الهندسة التفاضلية في جامعة ستانفورد عام ١٩٨٧م، وفي جامعة برنستون عام ١٩٩٠م، وانطلاقاً من حاجتي إلى فهم التقوّس بشكلٍ أفضل فيما يتعلق بعملِي. يتضمن الفصل الأخير بحثاً قام بإعداده طلاب كلية ويليامز.

أودُّ أن أشكر طلابي، ولا سيما أليس أندروود؛ وبول سيجل، مساعدتي التدريسي في تحليل المُوتر؛ والمشاركين في الحلقة الدراسية التي أُقيمت في واشنطن ولي بقيادة تيم مردوتش و فرانك جونز، وروب كوسنر، وجون م. وسوليفان، وجين تايلور، وديف ويت.

يتضمن هذا التنقيح للإصدار الثاني الكثير من التمارين الجديدة وتوسّعاً في الفصل التاسع الذي يتناول الهندسة العمومية. يلي ذلك تمرين مفيد لنيتش [Nit]. ويتضمن ثبت المراجع إسنادات ترافقية لكل اقتباس في هذا الكتاب.

من بين الكتب الأخرى التي رأيتُ أنها مفيدة *Differential and Riemannian Geometry* لمؤلفه لوغويتز [Lau]، *Notes on Differential Geometry* لمؤلفه هيك [Hi] (يا للأسف نفدت

طبعته)، Comprehensive Introduction to Differential Geometry لمؤلفه سبيفاك [S]، Differential Geometry لمؤلفه ستوكر [St]. وقد قدم تشافل [Ch] وبيترسن [Pet2] نصوصاً أكثر تعقيداً عن هندسة ريمان.

إنني أستخدم هذا الكتاب حالياً وكتاب *Geometric Measure Theory: A Beginner's Guide* [M]، وقد قام بتحريرهما وتزويدهما برسومات جيم بريدت التوضيحية كلاوس بيترز، كنصوص لمقرر جامعي متقدم لفصل واحد في كلية ويليامز.

وليامز تاون، ماساتشوستس

فرانك مورغان



## المحتويات

هـ.....	مقدمة المترجم
ط.....	تمهيد
١.....	الفصل الأول: المقدمة
٥.....	الفصل الثاني: لمنحنيات في $\mathbb{R}^n$
١١.....	الفصل الثالث: السطوح في $\mathbb{R}^3$
٢٩.....	الفصل الرابع: السطوح في $\mathbb{R}^n$
٣٥.....	الفصل الخامس: السطوح ذات البعد $m$ في $\mathbb{R}^n$
٥١.....	الفصل السادس: الهندسة الريمانية الداخلية
٧١.....	الفصل السابع: النسبية العامة
٨٧.....	الفصل الثامن: نظرية جاوس وبونيه
١٠١.....	الفصل التاسع: الجيوديسي والهندسة العمومية
١١٥.....	الفصل العاشر: المعيار العام
١٢٩.....	الصيغ المختارة
١٣٣.....	حل التمارين المختارة
١٤٥.....	المراجع
١٤٩.....	دليل الرموز

١٥٣	دليل الأسماء .....
١٥٥	ثبت المصطلحات: أولاً : عربي – إنجليزي .....
١٦٢	ثانياً : إنجليزي – عربي .....
١٧١	كشاف الموضوعات .....

# الفصل الأول

## المقدمة

تتمثل الفكرة الرئيسة للهندسة الريمانية في التقوس. حيث إنَّها تصف أهم الخصائص الهندسية للمسارات الدائرية ومسارات الفضاء الكوني. سنبدأ في هذا الكتاب بتعريف التقوس لمنحنى المسار الدائري. يستخدم الفصل السابع تفسير النسبية العامة للكتلة على أنَّها تقوس الفضاء من أجل توقُّع مدار عطارد المبهم.

يُعرَّف التقوس  $\kappa$  لمسارٍ دائري بأنَّه معدل تغير اتجاه المتجه المتحرك  $T$ ، ويُقاس بالراديان أو بالدرجات لكل متر. يكون التقوس كبيراً في المنحنيات الحادة، ويساوي صفراً في المنحنيات المستقيمة. كما هو موضَّح في الشكل (١, ١).

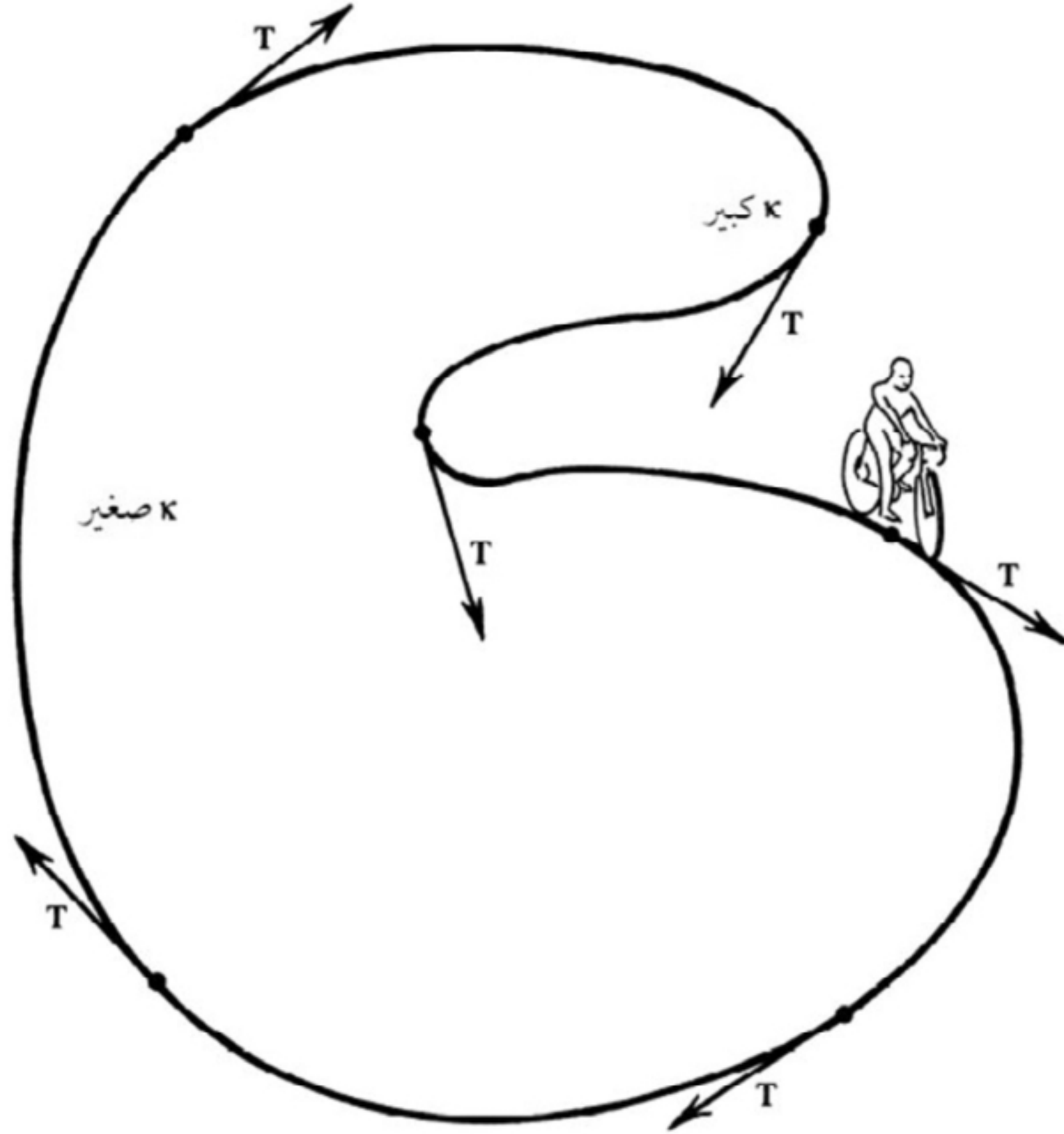
يمكن لسطحٍ ثنائي الأبعاد، مثل السطح المبين في الشكل ١-٢، أن ينحني في اتجاهات مختلفة بمقادير مختلفة ربما للأعلى في بعض الاتجاهات، وللأسفل في اتجاهاتٍ أخرى، وعلى طول الخطوط المستقيمة في المنتصف. إنَّ التقوسين الرئيسين  $\kappa_1$  و  $\kappa_2$  هما الأكثر صعوداً (إيجابي) والأكثر نزولاً (سلبي)، على التوالي. بالنسبة إلى شكل السرج الموضَّح في الشكل (١, ٢)، يتَّضح أنَّه عند نقطة الأصل يصبح  $\kappa_1 = \frac{1}{4}$  و  $\kappa_2 = -1$ .

إنَّ التقوس الوسطي يمكن حسابه كالتالي  $H = \kappa_1 + \kappa_2 = -\frac{3}{4}$ . بما إنَّ تقوس جاوس هو  $G = \kappa_1 \kappa_2 = -\frac{1}{4}$ . في القطب الجنوبي لكُرَّة الوحدة كما هو موضَّح في الشكل ١-٣، التقوسان الرئيسان هما  $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$  والتقوس الوسطي هو  $H = 2$  وتقوس جاوس هو  $G = 1$ .

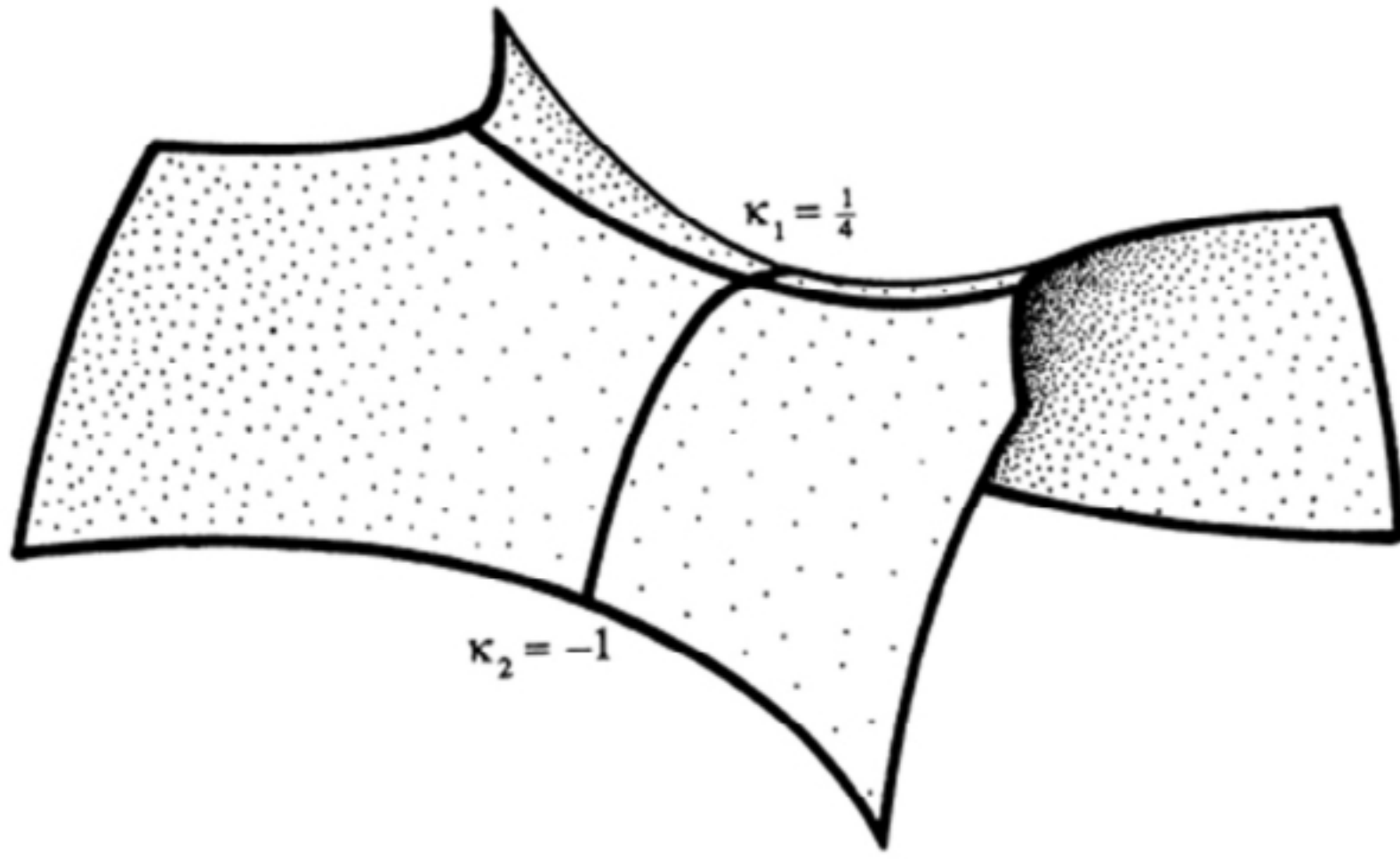
باعتبار  $\kappa_1$  و  $\kappa_2$  يقيسان الدرجة التي ينحني بها السطح في الفضاء، فلا يمكن قياسها عبر



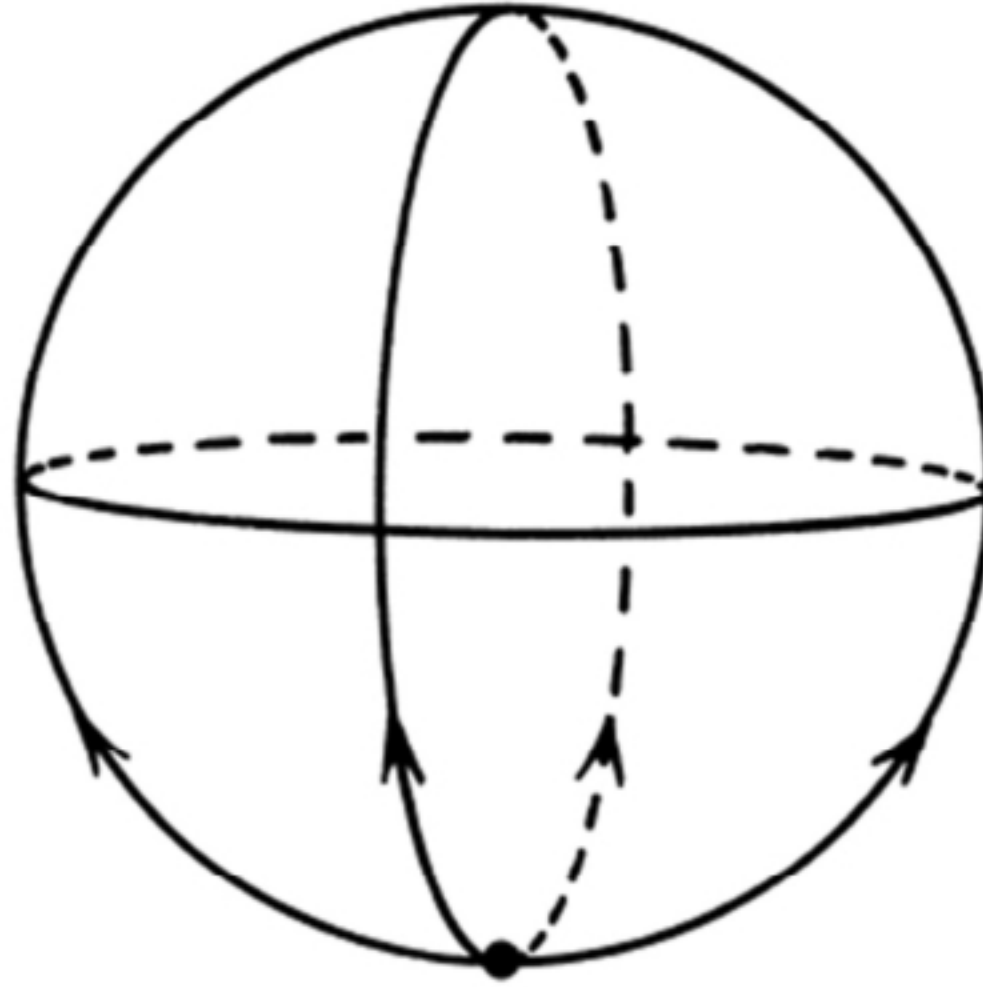
أداة محصورة في السطح. حيث إنَّها خصائص "خارجية". لقد توصَّل جاوس إلى اكتشافٍ مذهل، إلا أنَّه يمكن قياس تقوس جاوس  $G = \kappa_1 \kappa_2$  من حيث المبدأ، من داخل السطح. تفيد هذه النتيجة، التي تُعرف بمبرهنة إغريغوم أو المبرهنة المهمة، أنَّ تقوس جاوس هو خاصية "داخلية". إنَّ فوق السطح ذي البعد  $m$  في  $\mathbb{R}^{m+1}$  له  $m$  من التقوسات الرئيسة  $\kappa_1, \dots, \kappa_m$  عند كل نقطة. بالنسبة للسطح ذي البعد  $m$  في  $\mathbb{R}^n$  فإنَّ الوضع أكثر تعقيداً؛ حيث إنَّه لا يُوصف بالأرقام أو المتجهات، بل من خلال المُوتر الأساسي الثاني. ومع ذلك، فإنَّ تعميم مبرهنة إغريغوم لتبيّن أنَّ التجميع "لموتر تقوس ريمان" هو داخلي.



الشكل (١, ١). يُعرّف التقوس بأنَّه معدل تغير اتجاه المتجهة المتحرك.



الشكل (١, ٢). في منتصف هذا السرج، التقوس الصاعد الأقصى هو  $\kappa_1 = \frac{1}{4}$  والتقوس النازل الأقصى هو  $\kappa_2 = -1$ .



الشكل (٣, ١). في القطب الجنوبي، التقوس هو  $+1$  في جميع الاتجاهات.

تسعى الكتب والمقالات الحديثة في مجال الهندسة التفاضلية لأن تعطي التقوسات الداخلية تعاريف داخلية و تهمل المحيط  $\mathbb{R}^n$  منذ البداية. في هذا الكتاب، تستقر السطوح في  $\mathbb{R}^n$ ، حيث يمكننا إعطاء تعريفات مجردة للموتر الأساسي الثاني وموتر تقوس ريمان. نُثبت لاحقاً أن موتر تقوس ريمان داخلي حقاً.



## الفصل الثاني

### المنحنيات في $\mathbb{R}^n$

تتمثل الفكرة الرئيسة للهندسة الريمانية - التقوس - في منحنيات الفضاء المبيّنة في هذا الفصل. بالنسبة للمنحنى البارامتري  $x(t)$  في  $\mathbb{R}^n$ ، حيث إن السرعة  $v = \dot{x}$  ومماس الوحدة  $T = \frac{v}{|v|}$ ، يعرف متجه التقوس  $\kappa$  بأنه معدّل تغير  $T$  بالنسبة إلى طول القوس:

$$(٢, ١) \quad \kappa = dT/ds = \frac{dT/dt}{ds/dt} = \frac{1}{|v|} T'.$$

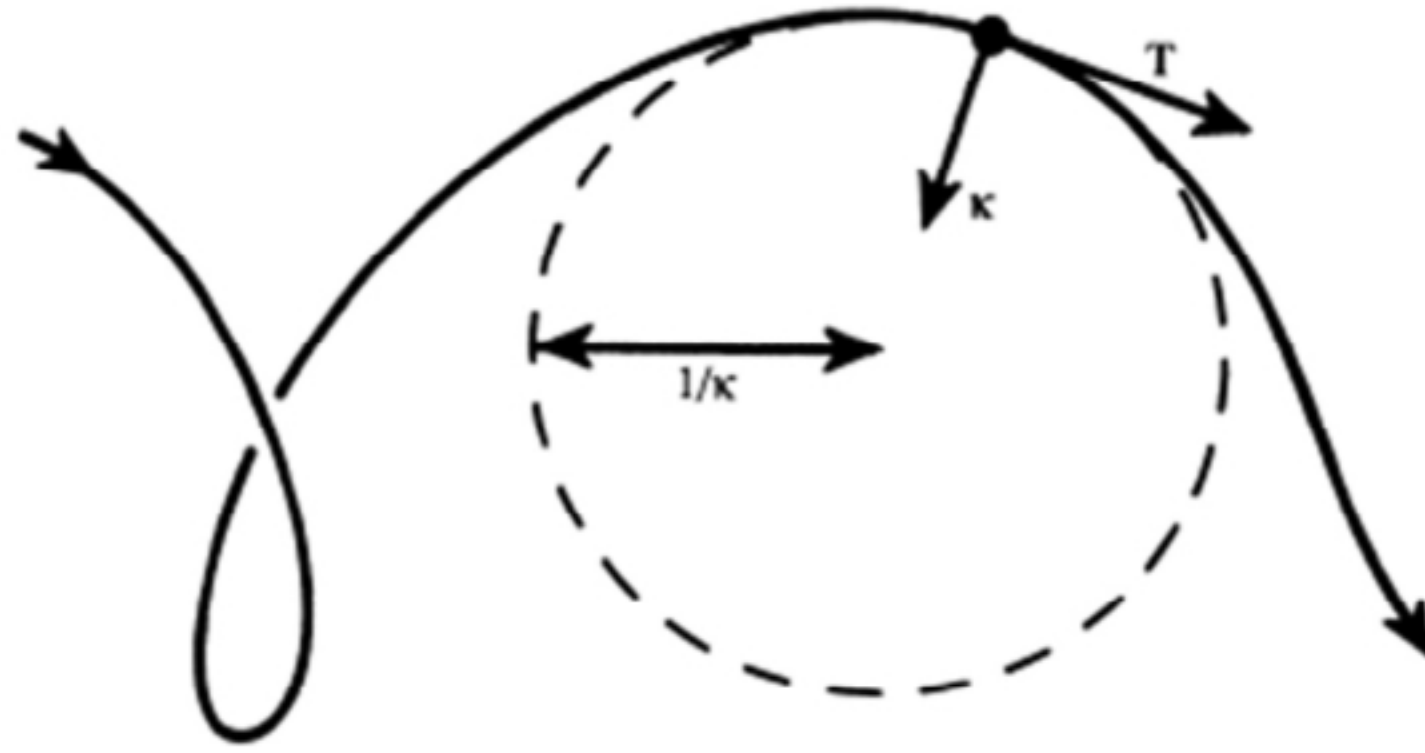
يُشير متجه التقوس  $\kappa$  إلى الاتجاه الذي يتحرك فيه المماس  $T$ ، متعامداً على  $T$ . بحيث يعطي طوله (التقوس القياسي  $\kappa = |\kappa|$ ) معدّل الانعطاف. كما هو موضح في الشكل 2-1. بالنسبة للمنحنى المستوي ذي ناظمي الوحدة  $n$ ،

$$(٢, ٢) \quad \kappa = |dn/ds|.$$

بالنسبة لدائرة نصف قطرها  $a$ ، يشير  $\kappa$  إلى المركز، ويكون  $\kappa = 1/a$ ، بالنسبة للمنحنى العام، فإن أفضل تقريب، أو ملاصقة عندما يكون نصف قطر الدائرة  $1/\kappa$ ، ويُسمى نصف قطر التقوس.

إذا كان المنحنى معلّماً بطول القوس، فإنّ متجه التقوس  $\kappa$  يساوي  $d^2x/ds^2$ . إذا كان المنحنى هو رسم الدالة  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ ،  $y = f(x)$  مماساً للمحور  $x$  في نقطة الأصل  $0$ ، إذاً

$$\kappa(0) = f''(0) \in \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}.$$



الشكل (١, ٢). يُشير متجه التقوس  $\kappa$  إلى الاتجاه الذي ينعطف فيه متجه المماس  $T$  وإلى مدى سرعته. إنَّ طوله  $|\kappa|$  هو مقلوب نصف قطر الدائرة الملاصقة.

دون فرضية التماس، يكون التقوس القياسي

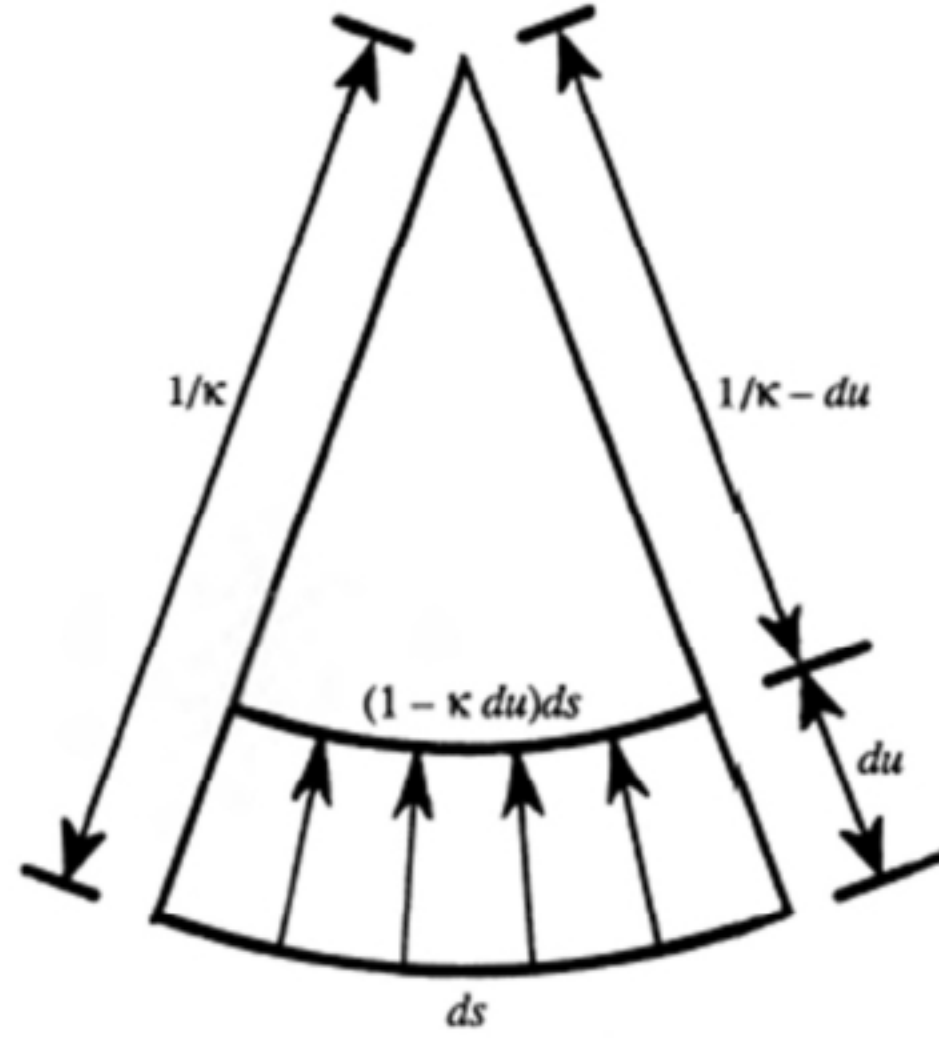
$$\kappa = |f''| \sqrt{1 + |f'|^2 \sin^2 \theta} / (1 + |f'|^2)^{3/2},$$

حيث إنَّ  $\theta$  هي الزاوية بين  $f'$  و  $f''$ . فإنَّ من المؤكد أنه في  $\mathbb{R}^2$ ،  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ،  $\theta = 0$ ، و

$$\kappa = |f''| / (1 + |f'|^2)^{3/2}.$$

يشير التقوس كيف أن طول المنحنى يتغير كلما كان المنحنى مشوّهاً. فإذا دفع جزء متناهي الصغر في منحنى مستوي  $ds$  المسافة  $du$  في الاتجاه  $\kappa$ ، فإنَّ الطول يتغير بالعامل  $1 - \kappa du$ . والحاصل أنَّ القوس الأصلي يوجد في الصف الثاني لدائرة نصف قطرها  $1/\kappa$ ، والصف الجديد في دائرة نصف قطرها  $(1/\kappa)(1 - \kappa du)$ .

كما هو موضح في الشكل (٢, ٢). بصورة أعم، إذا كان الانسحاب هو متجه  $du$ ، فليس بالضرورة أن يكون باتجاه  $\kappa$ ، حيث إنَّ ما يهم هو مركبة  $du$  في اتجاه  $\kappa$ ، ويتغير الطول بالعامل  $1 - \kappa \cdot du$ . وبالتالي، فإن المعدل الأولي لتغير طول المنحنى  $C$  في  $\mathbb{R}^n$  مع السرعة الأولية  $V = du/dt$  هو  $-\int \kappa \cdot V ds$  (كما هو موضح في الباب 4-10).



الشكل (٢, ٢). ينخفض عنصر طول القوس  $ds$  المدفوع باتجاه  $\kappa$  بالعامل  $1 - \kappa du$ .

(٢, ١) مسألة المدخنة في أحد الأيام، تلقيتُ مكاملة من شركة تقوم ببناء مدخنة ضخمة، تتطلب وصل شريط متصاعد، أو لوح طولي لتأمين الدعم الهيكلي (كما هو موضح في الشكلين (٢, ٣) و (٢, ٤). فكان عليهم بداهةً أن يقصّوا قطع اللوح الطولي من قطعة معدنية مسطّحة (كما هو موضح في الشكل (٢, ٥). لقد كان السؤال، ما هو خيار نصف قطر الدائرة الداخلي  $r$  الذي يجعل اللوح الطولي مناسباً للمدخنة؟

إنّ المنحنى الذي يتصل اللوح الطولي من خلاله بالمدخنة هو لولب:

$$x = (x, y, z) = (a \cos t, a \sin t, ht/2\pi),$$

من الإحداثيين  $x$  و  $y$  اللذين يتبعان الدائرة التي نصف قطرها  $a = 3.75$  قدم، في حين أن الإحداثي  $z$  يزداد بمعدل ثابت. في كل دوران، تزداد  $\theta$  في المدى  $2\pi$  وتزداد  $z$  من خلال  $h = 31.5$  قدم. وبالتالي يكون متجه السرعة

$$v = x' = (-a \sin t, a \cos t, h/2\pi)$$

والسرعة هي

$$\frac{ds}{dt} = |v| = \sqrt{a^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}} = c \approx 6.26.$$



الشكل (٢, ٣). الشريط المعدني، أو اللوح الطولي يلتف حول المدخنة بشكلٍ لولبي.

إنَّ طول الدورة الواحدة هو

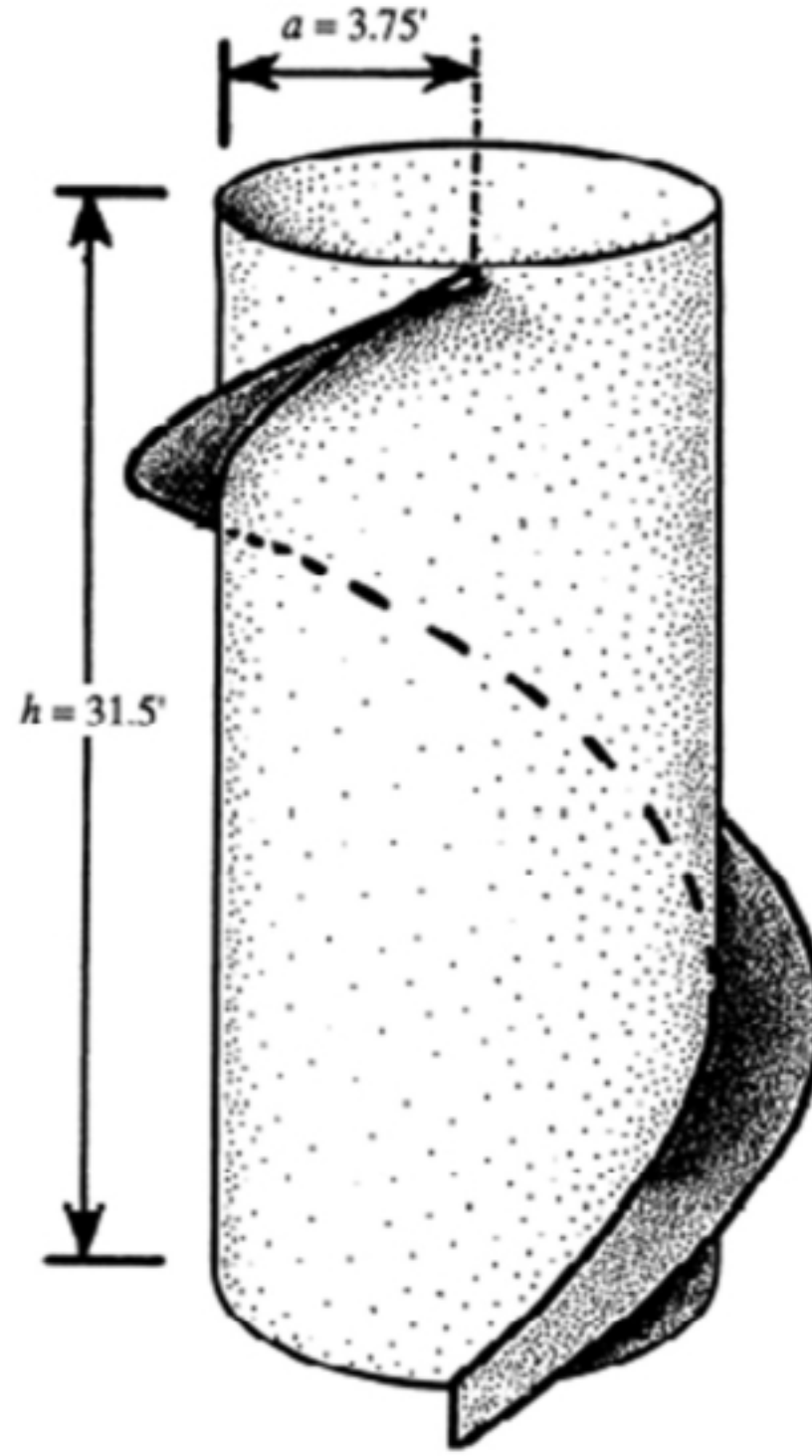
$$L = \int_0^{2\pi} |v| dt = 2\pi c.$$

بالقياس مع دائرة، تخنَّ المهندس أن نصف قطر القطع الداخلي النموذجي  $r$  سيكون  $L/2\pi = c = 6.26$  قدم. عندما قام بإنشاء نموذج صغير، اكتشف أنَّ تخمينه كان صغيراً جداً. بعد بعض المحاولات والخطأ، لاحظ أنَّه قد كانت قطع اللوح الطولي بقياس  $r \approx 10\frac{1}{2}$  قدم مناسبة.

إنَّ الطريقة المثلى لحساب  $r$  هي أن يكون اللوح الطولي ذا تقوس صحيح. سنقوم الآن بحساب التقوس  $\kappa$  للولب وأخذ  $r$  على أنه نصف قطر التقوس  $1/\kappa$  (أي، نصف قطر الدائرة ذات تقوس متساو).

إنَّ متجهة مماس الوحدة هو  $T = v/|v| = v/c$  وبالتالي فإنَّ متجهة التقوس هو

$$\kappa = dT/ds = \frac{dT/dt}{ds/dt} = \frac{v'/c}{c} = \frac{1}{c^2}(-a \cos t, a \sin t, 0),$$

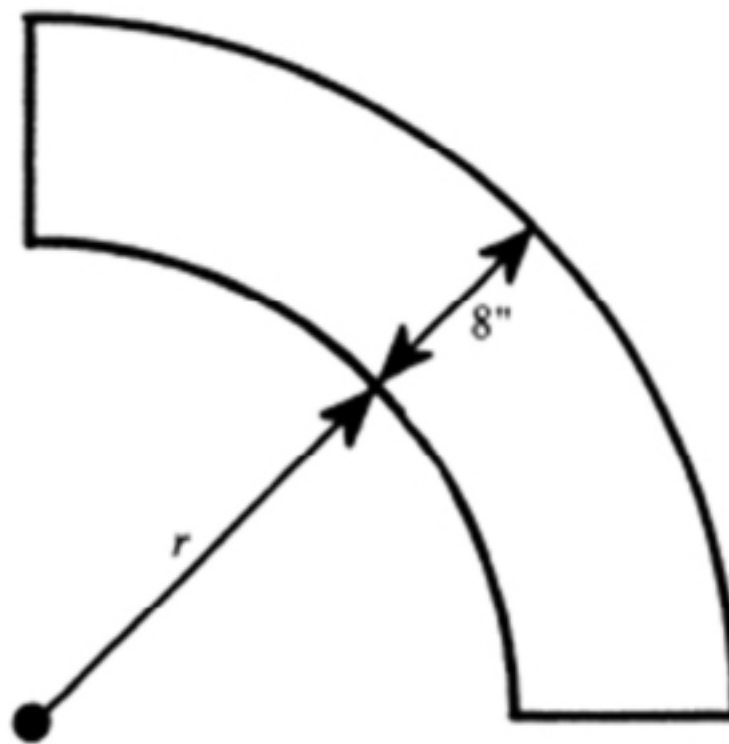


الشكل (٤, ٢). إنَّ نصف قطر المدخنة  $a = 3.75$  قدم. وارتفاع كل دورة للطول اللوحي هو 31.5 قدم. والتقوس

القياسي هو  $\kappa = a/c^2$  وعليه، فإن نصف القطر الداخلي المثالي هو:

$$r = 1/\kappa = c^2/a \approx 10.45 \text{ قدم}$$

وهو ما يتوافق تقريباً مع تجربة المهندس.



الشكل (٥, ٢). عندما يتم قص قطع اللوح الطولي من قطعة معدنية مسطحة، ما هو نصف القطر الداخلي  $r$  الذي

يجعل اللوح الطولي مناسباً للمدخنة؟



## تمارين

(١, ٢) احسب متجة التقوس عندما يكون  $x = 0$  لما يلي:

(أ)  $y = 7x^2 + 8x^3 + 9x^4$

(ب)  $y = 6x + 7x^2 + 8x^3 + 9x^4$

(ج)  $y = 5 + 6x + 7x^2 + 8x^3 + 9x^4$

(٢, ٢) يتحدد موقع " أنتيموث " (antimoth) في  $\mathbb{R}^3$  من العلاقة

$$x = \left( t \cos t, t \sin t, \frac{2\sqrt{2}}{3} t^{3/2} \right)$$

(أ) ارسم المسار.

(ب) احسب متجة التقوس  $\kappa$  كما في مسألة المدخنة في الباب ٢-١ (تصبح مشوشة).

(ج) احسب المسافة المقطوعة خلال الثواني الأربع الأولى.

(٢, ٣) أ. ارسم  $\{y = x^4\}$  في  $\mathbb{R}^2$ . علام ستخمن أن التقوس هو الأكبر قيمة؟

(أ) احسب التقوس القياسي  $\kappa = |\kappa|$  بتوسيط المنحنى على شكل  $x = (t, t^4)$ .

(ب) استخدم الصيغة الثانية المبينة في الصفحة ٦ للتحقق من إجابتك على لتمرين ب.

(ج) أين تكون قيمة  $\kappa$  الكبرى؟

## الفصل الثالث

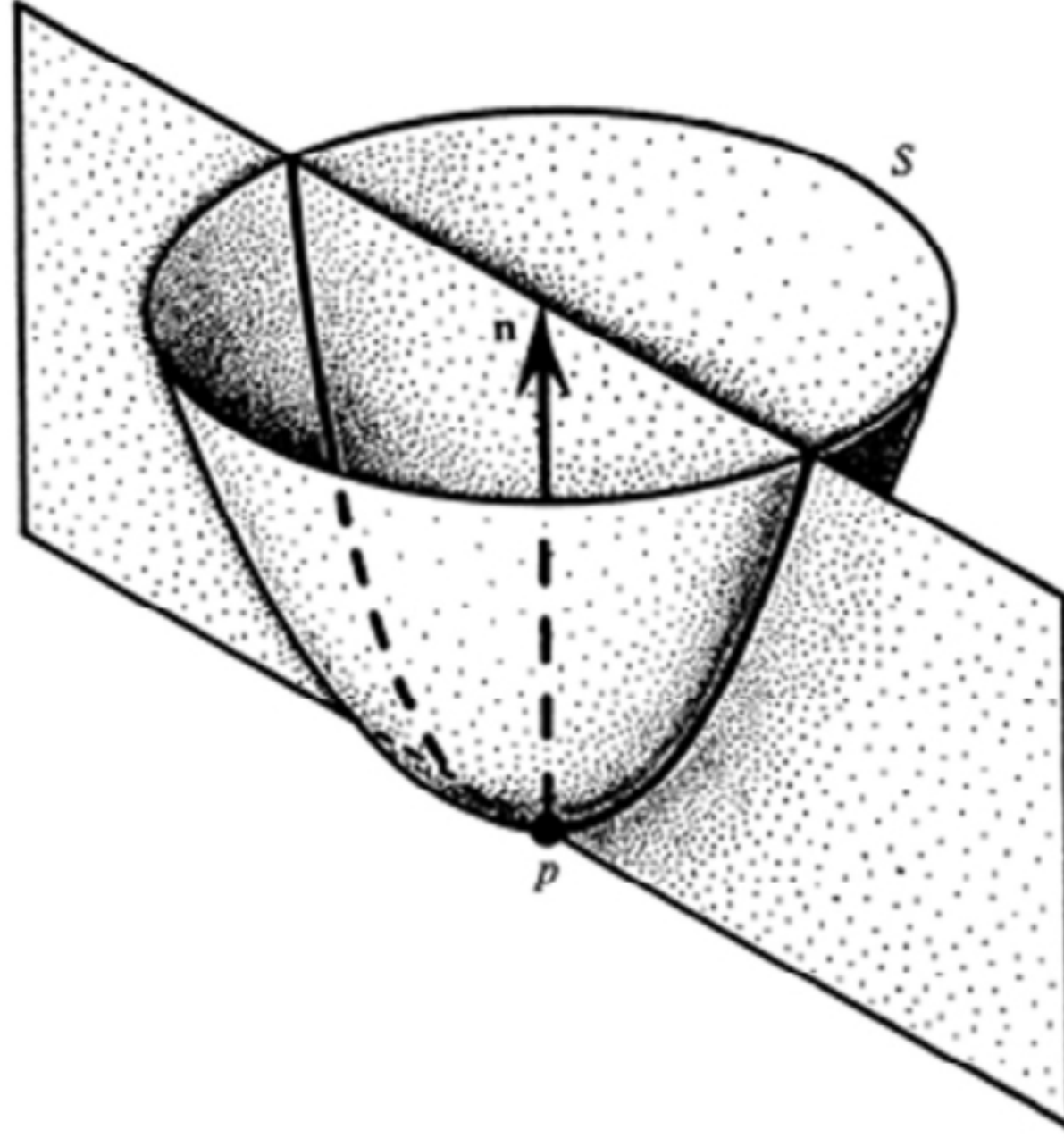
### السطوح في $\mathbb{R}^3$

يتناول هذا الفصل دراسة التقوس عند النقطة  $p$  لسطح  $S$  للمرتبة  $C^2$  في  $\mathbb{R}^3$ .  
يعني محلياً أن السطح هو رسم الدالة ذات المشتقة الثانية المتصلة. حيث يتضمن حساب التقوس الاشتقاق مرتين.

ليكن  $T_p S$  يشير إلى فضاء الظل للمتجهات الملامسة لـ  $S$  عند  $p$ . وليكن  $\mathbf{n}$  يشير إلى متجة الوحدة الناظمي لسطح  $S$  عند  $p$ . لدراسة تقوس  $S$ ، فإننا نقطع  $S$  إلى شرائح ذات سطوح مستوية عددها  $n$  وندرس متجة التقوس  $\mathbf{K}$  للمنحنيات الناتجة. (كما هو موضح في الشكل ٣-١). من المؤكد أنه يجب أن يكون كل  $\mathbf{K}$  مضاعفاً لـ  $\mathbf{n} : \mathbf{K} = \kappa \mathbf{n}$ . (سنسمح الآن بأن يكون  $\kappa$  موجباً أو سالباً. تعتمد إشارة  $\kappa$  إلى اختيار متجة الوحدة الناظمي،  $\mathbf{n}$ ). حيث سيظهر لنا أن أكبر وأصغر التقوسات  $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$  (تسمى التقوسات الرئيسة) تحدث في اتجاهات متعامدة وتحدد التقوسات في جميع الاتجاهات الأخرى.

اختر الإحداثيات المتعامدة في  $\mathbb{R}^3$  على أن تكون نقطة الأصل عند  $p$ ، والسطح  $S$  مماساً للمستوى  $x-y$  عند  $p$ ، ويشير  $\mathbf{n}$  إلى محور  $z$  الموجب. يشير السطح  $S$  محلياً إلى رسم الدالة  $z = f(x, y)$ . أي متجة وحدة  $\mathbf{v}$  مماس لـ  $S$  عند  $p$ ، مع متجة الوحدة الناظمي  $\mathbf{n}$  يولد مستويًا، بحيث يتقاطع مع  $S$  في منحنى. إن التقوس  $\mathbf{K}$  لهذا المنحنى، الذي نسميه التقوس في الاتجاه  $\mathbf{v}$ ، هو المشتقة الثانية.

$$\kappa = \left( D^2 f \right)_p (v, v) = v' \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) \end{bmatrix} v$$



الشكل (١, ٣). يُقاس تقوس السطح  $S$  عند النقطة  $p$  بقياس شرائحه عبر المستويات.

على سبيل المثال، إذا كان

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \kappa = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

يُسمى الشكل الثنائي الخطي  $\left( D^2 f \right)_p$  في  $T_p S$  بالشكل الأساسي الثاني  $\Pi$  لسطح  $S$  عند النقطة  $p$ ، المعطى في إحداثيات على شكل مصفوفة متماثلة  $2 \times 2$ :

$$\mathbf{II} = D^2 f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

إنَّ هذه الصيغة جيدة عندما يكون السطح مماساً للمستوى  $x-y$ . بالنسبة للشكل الأساسي الثاني، نستخدم دائماً الإحداثيات المتعامدة.

باعتبار الشكل الأساسي الثاني  $\mathbf{II}$  متماثلاً، فقد نختار إحداثيين  $x, y$  بحيث يكون  $\mathbf{II}$  مصفوفة قطرية.

$$\mathbf{II} = \begin{bmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{bmatrix}$$

يتوصل إلى تقوس  $\kappa$  في الاتجاه  $\mathbf{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$  من صيغة أويلر (١٧٦٠):

$$\kappa = \mathbf{II}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \mathbf{v}^T \mathbf{II} \mathbf{v} = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta,$$

المتوسط الموزون لـ  $\kappa_1, \kappa_2$ . على وجه التخصيص، إنَّ التقوسين الأكبر والأصغر هما  $\kappa_1, \kappa_2$ ، ويتوصل إليهما من الاتجاهات المتعامدة التي اخترناها للمحورين  $x$  و  $y$ . بالمناسبة، يظهر ليونارد أويلر على قطعة نقدية فئة 10 فرنكات سويسرية كما هو موضح في (الشكل ٢، ٣).

### (٣، ١) تعريفات

عند النقطة  $p$  على السطح  $S \subset \mathbb{R}^3$  تُسمى القيمتان الذاتيتان  $\kappa_1, \kappa_2$  للشكل الأساسي الثاني  $\mathbf{II}$ ، بالتقوسات الرئيسة، ويسمى المتجهان الذاتيان (لا يمكن تحديدهما إلا إذا كان  $\kappa_1 = \kappa_2$ ) بالاتجاهين الرئيسين أو اتجاهي التقوس. ويُسمَّى أثر الشكل الأساسي الثاني  $\mathbf{II}$ ،  $\kappa_1 + \kappa_2$ ، بالتقوس الوسطي  $H$ . كما يُسمَّى محدد الشكل الأساسي الثاني  $\mathbf{II}$ ،  $\kappa_1 \kappa_2$ ، بتقوس جاوس  $G$ . لاحظ إشارتي  $\mathbf{II}$  و  $H$ ، ما عدا  $G$ ، تعتمدان على متجهة الوحدة الناظمي  $\mathbf{n}$ . هناك بعض المعالجات تعرّف التقوس الوسطي بأنه

$$\frac{1}{2} \text{trace } \mathbf{II} = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

باعتبار التقوس  $K$  يحدد معدل تغير طول مشتقة المنحنى المبين في الفصل الثاني، فإن التقوس الوسطي  $H$  يحدد معدل تغير مساحة مشتقة السطح. باعتبار أنه تُسمى معدل تغير دالة في عدة متغيرات، الاشتقاق الاتجاهي وتعتمد على اتجاه التغير، فإن المعدل الابتدائي لتغير مساحة السطح يعتمد على سرعته الابتدائية  $V$  ويُسمى التغير الأول.



الشكل (٢, ٣). يظهر ليونارد أولر على قطعة نقدية فئة 10 فرنكات سويسرية.

### (٢, ٣) النظرية

ليكن  $S$  سطحاً متصلاً في  $\mathbb{R}^3$ . يتم التوصل إلى التغير الأول لمساحة السطح  $S$  فيما يتعلق بحقل المتجهة المتصل الحامل المتراص  $V$  بالتراص على السطح  $s$  بتكامل  $V$  بالنسبة إلى التقوس الوسطي:

$$\delta^1(S) = - \int_S V \cdot Hn.$$

ملاحظة: نعرف  $\delta^1(S)$  على أنه

$$\frac{d}{dt} \text{area}(S + tV) \Big|_{t=0},$$

أو على نحو مماثل،

$$\frac{d}{dt} \text{area}(f_t(S)) \Big|_{t=0},$$

حيث إن  $f_t$  هو أي تشوه للفضاء  $C^3$  ذي متجهة السرعة الأولية  $V$  على السطح  $S$ . [ يعتمد  $\delta^1(S)$  على  $V$  فقط وهو خطي في  $V$ . إذا كان للسطح  $S$  مساحة غير محدودة، فينبغي التركيز على حامل  $V$  (حيث إن  $V \neq 0$ ). ]

**البرهان:** باعتبار صيغة  $V$  خطية، فيمكننا النظر إلى المتغيرين المماسي والناظمي بشكل منفصل. بالنسبة للمتغيرات المماسية، التي تتوافق مع تغيير السطح على ذاته،  $\delta^1(S) = 0$ ، وهو ما يؤكد الصيغة. ليكن  $Vn$  متغيراً ناظماً صغيراً، واعتبار مساحة الصغائر المربعة  $dx dy$  عند النقطة  $p$ ، حيث يمكننا افتراض الاتجاهات الرئيسية المتجهة نحو المحاور. في المرتبة الأولى، إن مساحة الصغائر الجديدة هي

$$(1 - V\kappa_1)dx (1 - V\kappa_2)dy \approx (1 - VH)dx dy = (1 - V \cdot Hn)dx dy$$

(قارن بالشكل ٢, ٢). تأتي الصيغة بعد ذلك.

**ملاحظة:** يميل السطح الفيزيائي مثل فيلم الصابون إلى التحرك في الاتجاه الناظمي للثقبوس الوسطي الموجب وذلك لتقليل مساحته، ما لم يتوازن من خلال الضغط المقابل. ويتناسب الثقبوس الوسطي لفقاعة صابون في التوازن مع فرق الضغط خلالها.

### (٣, ٣) السطوح متناهية الصغر

حسب النظرية (٣, ٢) التي تشير إلى أنه يجب أن يكون لسطح تقليل المساحة، الذي يقلل المساحة في السطوح المقابلة ذات الحد ذاته، ثقبوس وسطي منعدم. يُطلق على أي سطح ذي ثقبوس وسطي يساوي صفراً أنه سطح متناهي الصغر.

صوّرت بعض السطوح متناهية الصغر في الشكل (٣, ٣) إلى الشكل (٣, ٦). في كل نقطة، عندما ينعدم الثقبوس الوسطي، يجب أن تكون الثقبوسات الرئيسية متساوية في المقدار ومختلفة في الإشارة.

### (٣, ٤) الإحداثيات، والطول، والمقاس

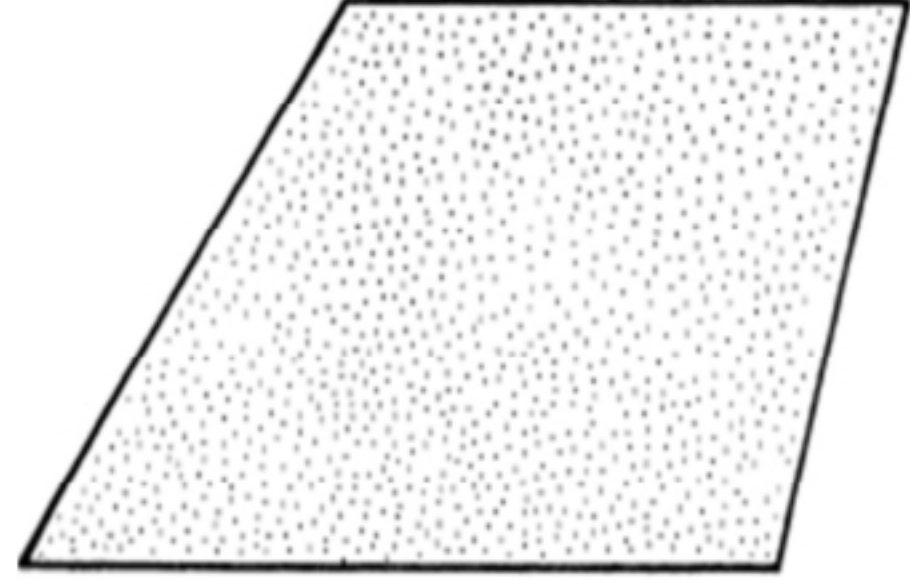
يُتوصل إلى الإحداثيات أو المتغيرات المحلية  $u_1, u_2$  على السطح  $S$  للمرتبة  $C^2$  في  $\mathbb{R}^3$  بالتماثل التفاضلي  $C^2$  (أو المتغيرات) بين مجال المستوى  $u_1, u_2$  وجزء من السطح  $s$ .

على سبيل المثال، تعطي إحداثيات الكرة المعيارية  $\varphi, \theta$  لإحداثيات المحلية على نصف قطر الكرة  $a$  باستثناء الأقطاب (حيث إن خط الطول  $\theta$  غير معرف و  $\varphi$  قابل للاشتقاق). إن متجة الموضع الذي تحدده هذه الإحداثيات هو

$$\mathbf{x} = (x, y, z) = (a \sin \varphi \cos \theta, a \sin \varphi \sin \theta, a \cos \varphi)$$

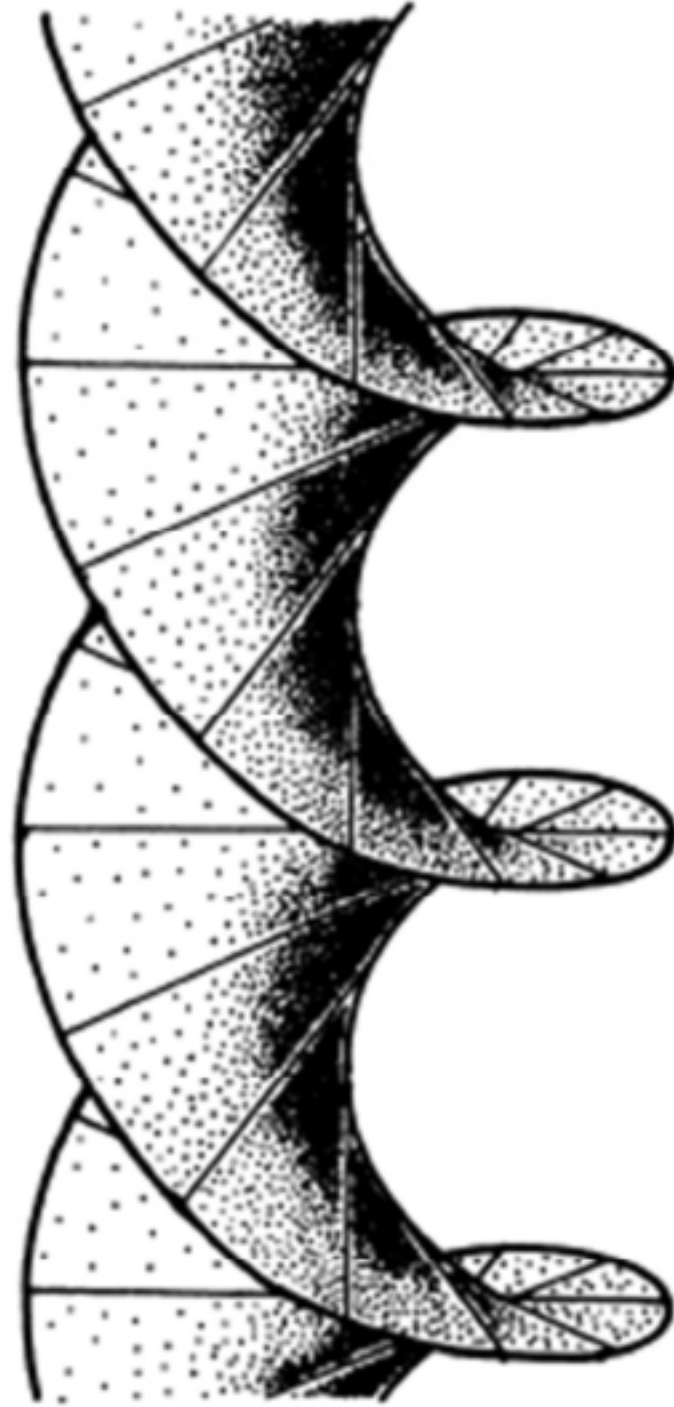
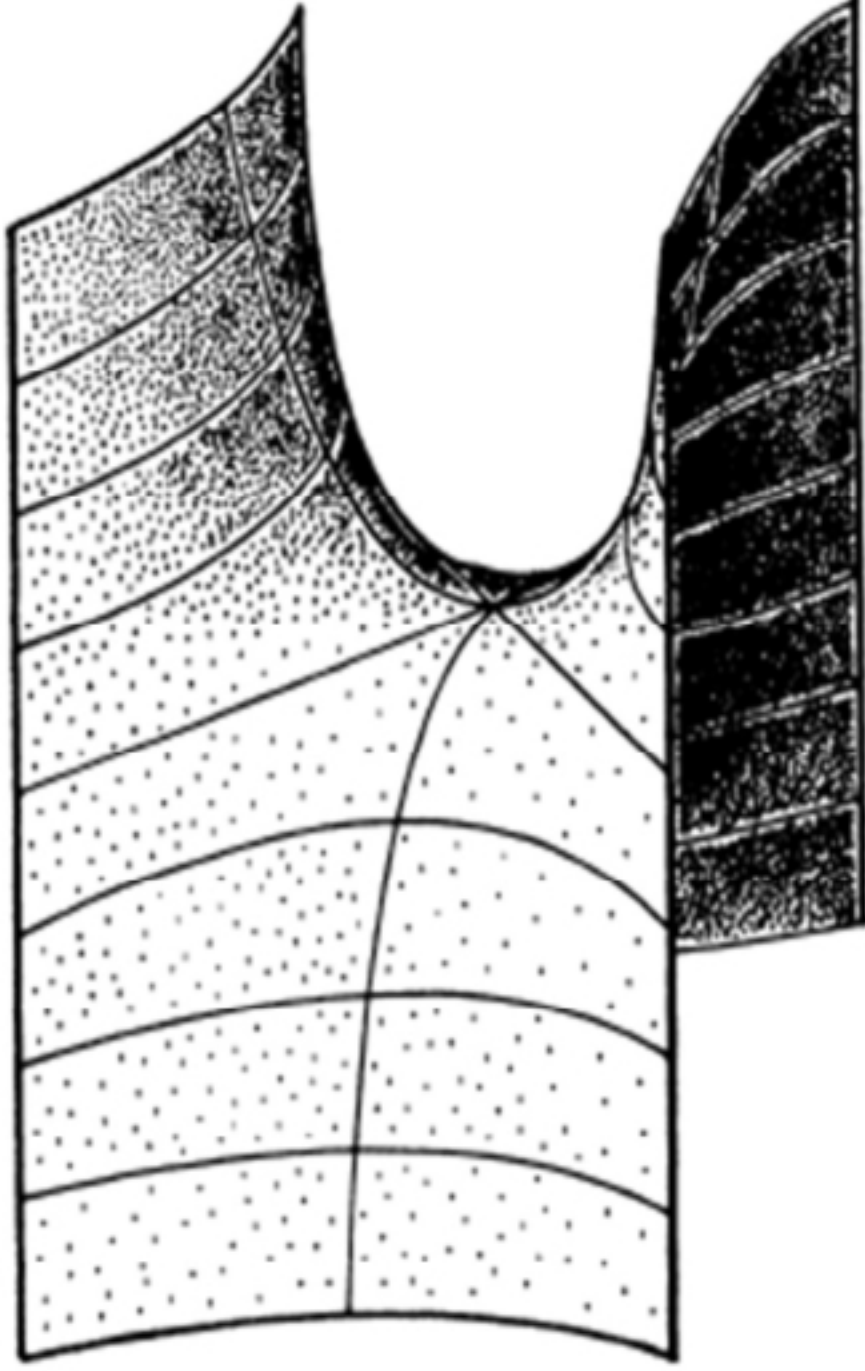


بصورة عامة، إنَّ الموضع هو بعض الدوال في الإحداثيات  $u_i$  . على طول المنحنى، إنَّ هذه الإحداثيات هي دوال في متغير وحيد هو  $t$  .



المستوي

سلسلي الشكل:  $\cosh z = \sqrt{x^2 + y^2}$  ، أويلر، ١٧٤٠م

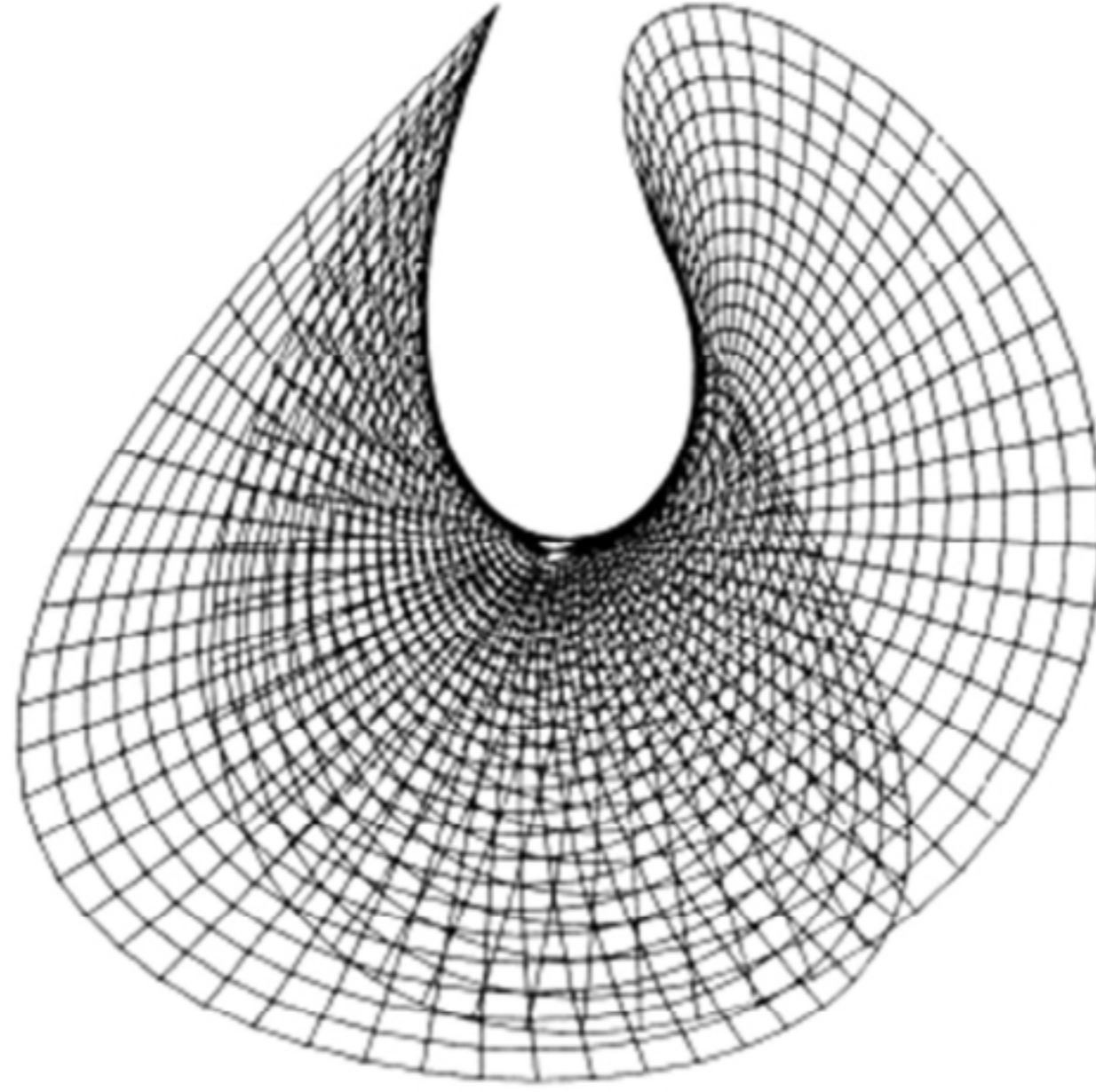


سطح شيرك:  $\cos ye^z = \cos x$  ١٨٣٥م

مجسم لولبي:  $y \tan z = x$  ، ميوسنير، ١٧٧٦م

الشكل (٣, ٣). بعض السطوح متناهية الصغر المعروفة. (فرانك مورغان، *Geometric Measure Theory*، الصفحة ٦٨.

©. ١٩٨٨م، المطبعة الأكاديمية. جميع الحقوق محفوظة. تمت إعادة الطباعة بموافقة الناشر.)



$$\begin{aligned}x &= \operatorname{Re}\left(w - \frac{1}{3}w^3\right) \\y &= \operatorname{Re}\left(i\left(w + \frac{1}{3}w^3\right)\right) \\z &= \operatorname{Re}\left(w^2\right), \quad w \in \mathbb{C}\end{aligned}$$

الشكل (٤, ٣). سطح أنبيير ١٨٦٤م.

يشير الدليل السفلي لمتجه الموضع  $\mathbf{x}$  إلى الاشتقاق الجزئية بالنسبة إلى  $u_i$ :

$$\mathbf{x}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i} = \left( \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial y}{\partial u_i}, \frac{\partial z}{\partial u_i} \right)$$

تشير النقطة إلى الاشتقاق بالنسبة إلى  $t$ :

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \sum \mathbf{x}_i \dot{u}_i \quad (\text{قاعدة السلسلة})$$

يحقق عنصر طول القوس  $ds$

$$ds^2 = |d\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{x}_1 du_1 + \mathbf{x}_2 du_2|^2$$

(١, ٣)

$$= (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1) du_1^2 + 2(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2) du_1 du_2 + (\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2) du_2^2,$$



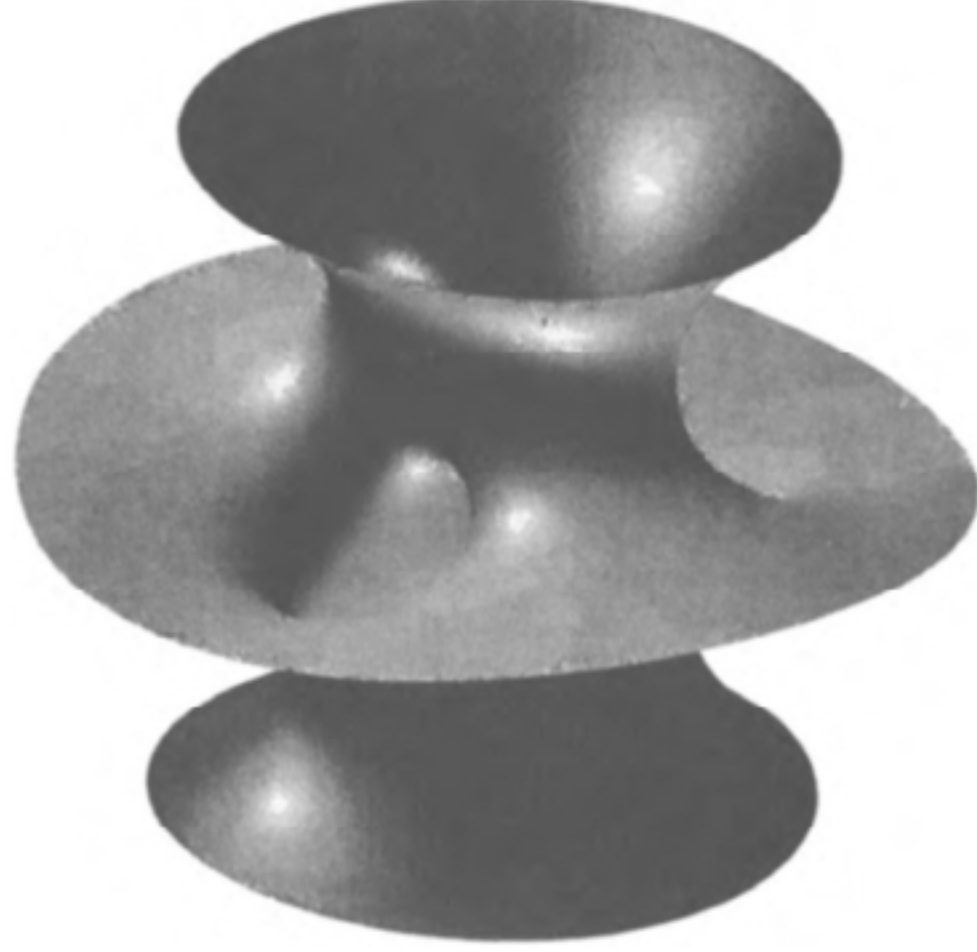
(٣, ٢)

$$ds^2 = \sum g_{ij} du_i du_j ,$$

حيث إنَّ

(٣, ٣)

$$g_{ij} = \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j}$$



الشكل (٣, ٥). سطح كوستا، وهوفمان، وميكس [Cos]، [HoM]، [Ho]. هو السطح المتناهي الصغر، التام، الطمر الذي تم اكتشافه منذ عهد قريب. (بإذن من ديفيد هوفمان، وجيم هوفمان، ومايكل كالاهاان.)



الشكل (٣, ٦). أحد أحدث السطوح متناهية الصغر التامة الطمرة: النوع الأول لولبي، اكتشفه ديفيد هوفمان، وفوشينغ واي، وهيرمان كارشر [Hof] (١٩٩٣م). صورة أنشئت بالحاسب من قبل جيمس ت. هوفمان في مختبر غانغ، جامعة ماساتشوستس، أمهيرست، حقوق التأليف والنشر غانغ، ١٩٩٣م.

على سبيل المثال، على كرة نصف قطرها  $a$  لدينا  $L = \int ds$  ، حيث إنه عندما تنقلب

$$ds^2 = a^2 d\varphi^2 + a^2 \sin^2 \varphi d\theta^2 = \left( a^2 \dot{\varphi}^2 + a^2 \sin^2 \varphi d\dot{\theta}^2 \right) dt^2,$$

لذا  $g_{11} = a^2, g_{22} = a^2 \sin^2 \varphi$  و  $g_{12} = g_{21} = 0$  (كما هو موضح في التمرين ٣, ٤).

تُسمى المصفوفة  $g = [g_{ij}]$  الشكل الأساسي الأول أو المقاس. إنها كمية داخلية ترتبط بالقياسات الموجودة داخل السطح.

لاحظ أنه في الصيغة المتعلقة بالطول

$$\begin{aligned} \sum g_{ij} du_i du_j &= g_{11} du_1 du_1 + g_{12} du_1 du_2 + g_{21} du_2 du_1 + g_{22} du_2 du_2 \\ &= g_{11} du_1^2 + 2g_{12} du_1 du_2 + g_{22} du_2^2 \end{aligned}$$

بالنسبة إلى سطوح عديدة في  $\mathbb{R}^3$  ، من الممكن استخدام  $x, y$  كإحداثيين محليين ودراسة  $z(x, y)$  . يلي ذلك

$$\mathbf{x}_2 = (0, 1, z_y) \quad \text{و} \quad \mathbf{x}_1 = (1, 0, z_x)$$

تعطي الفرضية التالية صيغاً مفيدة للثقبوس الوسطي  $H$  وثقبوس جاوس  $G$  . حيث يشير  $g^{-1}$  إلى معكوس مصفوفة الشكل الأساسي الأول  $[g_{ij}]$  .

(٣, ٥) الفرضية

بالنسبة لأي من الإحداثيين المحليين  $u_1, u_2$  عند النقطة  $p$  في سطح  $C^2$  في  $\mathbb{R}^3$  ، يشابه الشكل الأساسي الثاني  $\Pi$  عند النقطة  $p$  ما يلي

$$(g^{-1}) (D^2 \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = g^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{11} \cdot \mathbf{n} & \mathbf{x}_{12} \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{x}_{12} \cdot \mathbf{n} & \mathbf{x}_{22} \cdot \mathbf{n} \end{bmatrix}$$

حيث إنَّ

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2|} \quad \text{و} \quad x_{ij} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u_i \partial u_j}$$

وبالتالي

(٣, ٤)

$$H = \text{trace } g^{-1} \left( D^2 \mathbf{x} \right) \cdot \mathbf{n}$$

$$= \frac{x_2^2 x_{11} - 2(x_1 \cdot x_2) x_{12} + x_1^2 x_{22}}{x_1^2 x_2^2 - (x_1 \cdot x_2)^2} \cdot \mathbf{n}$$

(٣, ٥)

$$G = \det \left( g^{-1} \left( D^2 \mathbf{x} \right) \cdot \mathbf{n} \right)$$

$$= \frac{(x_{11} \cdot \mathbf{n})(x_{22} \cdot \mathbf{n}) - (x_{12} \cdot \mathbf{n})^2}{x_1^2 x_2^2 - (x_1 \cdot x_2)^2}$$

قبل الانتقال إلى إثبات الفرضية (٣, ٥)، نشير إلى أنه

(أ) عند تحديد  $H$  و  $G$  يمكنك بسهولة حل التقوسات الرئيسة:

$$\kappa = \frac{H \pm \sqrt{H^2 - 4G}}{2}$$

(ب) إذا كان السطح الرسم  $\mathbf{x} = (x, y, f(x, y))$ ، عندها يكون

(٣, ٦)

$$H = \frac{(1+f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1+f_x^2)f_{yy}}{(1+f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}$$

(٣, ٧)

$$G = \frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{(1+f_x^2 + f_y^2)^2}$$

البرهان: قد ننقل المماس  $s$  إلى المستوي  $x, y$  عند النقطة  $p = 0$ ، لذا فإن  $s$  محلياً هو،  $z = f(x, y)$  بحيث يكون  $f_x(0) = f_y(0) = 0$  و  $\mathbf{n}(0) = (0, 0, 1)$ .بالنسبة للإحداثيين المحليين  $x, y$ 

$$\mathbf{x} = (x, y, f(x, y)), \quad g(0) = I.$$

تشير الفرضية إلى أن الشكل الأساسي الثاني  $\Pi$  يشابه

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}_0,$$

وهو صحيح؛ في الواقع، إنهما متساويان.

والآن، ليكن  $u_1, u_2$  إحداثيين محليين، وليكن  $J$  يشير إلى الجاكوبي عند 0:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} \end{bmatrix}_0,$$

باعتبار

$$\frac{\partial z}{\partial u_1} \Big|_0 = \frac{\partial z}{\partial u_2} \Big|_0 = 0,$$

$$g = J^T J.$$

بعد ذلك، ومن خلال قاعدة السلسلة، واعتبار  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x} \cdot \mathbf{n} = 0$  و  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y} \cdot \mathbf{n} = 0$ ، فإن

$$(g^{-1})(D^2 \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = (J^T J)^{-1} J^T \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial x^2} \cdot \mathbf{n} & \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial x \partial y} \cdot \mathbf{n} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial x \partial y} \cdot \mathbf{n} & \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial y^2} \cdot \mathbf{n} \end{bmatrix} J = J^{-1} \Pi J$$

مشابه حقاً للشكل الأساسي الثاني  $\Pi$ .

مثال: نقوم بحساب تقوس الشكل السلسلي  $\sqrt{x^2 + y^2} = \cosh z$  الموضح في الشكل ٢, ٣. في أغلب النقاط يمكننا استخدام  $x$  و  $y$  كإحداثيات. وكبديل لذلك، نستخدم  $z$  والإحداثية القطبية  $\theta$ . تشير المعادلة إلى أن  $r = \cosh z$ . وبالتالي يكون الموضع:

$$\mathbf{x} = (x, y, z) = (\cosh z \cos \theta, \cosh z \sin \theta, z)$$

$$\mathbf{x}_1 = (\sinh z \cos \theta, \sinh z \sin \theta, 1)$$

$$\mathbf{x}_2 = (-\cosh z \sin \theta, \cosh z \cos \theta, 0)$$

$$\mathbf{x}_{11} = (\cosh z \cos \theta, \cosh z \sin \theta, 0)$$

$$\mathbf{x}_{12} = (-\sinh z \sin \theta, \sinh z \cos \theta, 0)$$

$$\mathbf{x}_{22} = (-\cosh z \cos \theta, -\cosh z \sin \theta, 0)$$

$$\mathbf{n} = \frac{(-\cos \theta, -\sin \theta, \sinh z)}{\cosh z}$$

من الفرضية (٣, ٥)

$$H = \frac{\cosh^2 z \mathbf{x}_{11} - 0 + \cosh^2 z \mathbf{x}_{11} \cdot \mathbf{n}}{\text{something}}$$

لذا، فإن الشكل السلسلي هو سطح متناهي الصغر حقاً و  $\kappa_1 = -\kappa_2$ .

$$G = \frac{(-1)(1) - 0}{\cosh^2 z \cosh^2 z - 0} = -\cosh^{-4} z$$

وبالتالي  $\kappa_1 = -\kappa_2 = \cosh^{-2} z$ .

(٣, ٦) نظرية جاوس إغريغوم

تقوس جاوس  $G$  داخلي. بالتحديد، هناك إحداثيان محليان وهما،  $u_1, u_2$  بالنسبة لأي نقطة  $p$  في السطح  $S$  للمرتبة  $C^2$  في  $\mathbb{R}^3$  بحيث يكون الشكل الأساسي الأول  $g$  عند النقطة  $p$  هو  $I$  إلى الرتبة الأولى. في أي نظام إحداثيات مماثل، يكون تقوس جاوس

$$G = \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u_1 \partial u_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u_1^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u_2^2}$$

ملاحظة: إن القول  $G = I$  يعني الرتبة الأولى أن  $g_{11}(p) = g_{22}(p) = 1, g_{12}(p) = 0$

، وكل

$$g_{i,j,k}(p) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}(p) = 0$$

البرهان. إنَّ  $s$  محلياً هو رسم الدالة  $f$  عبر مستواها المماسي. إنَّ الإحداثيات المتعامدة على المستوى المماسي تجعل المقياس  $g$  مساوياً لـ  $I$ . قد نفترض  $s$  هو مماس للمستوي  $x, y$  عند النقطة  $p$ . في الإحداثيين  $x, y$

$$g = \begin{bmatrix} 1+f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1+f_y^2 \end{bmatrix},$$

وعند النقطة  $p$

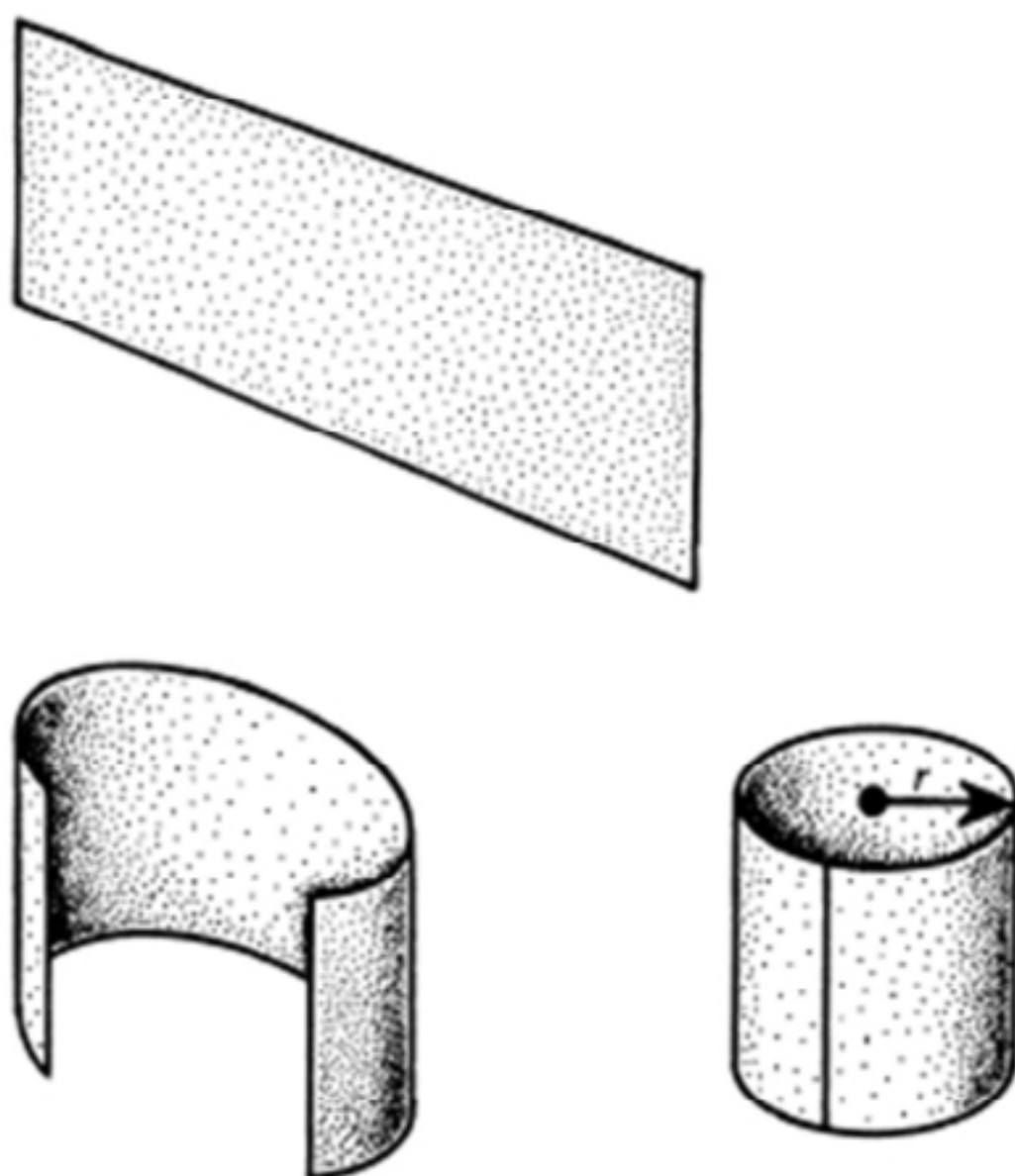
$$\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial y^2} = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = \det(D^2 f) = \det(\mathbf{II}) = G$$

تتوافق الإحداثيات التي يكون فيها المقياس عند النقطة  $p$  هو  $I$  مع الإحداثيات المتعامدة على مستوى المماس وبالتالي تعطي النتائج ذاتها.

ملاحظة: يتطلب التقدير التام لنظرية جاوس إغريغوم، إدراك أنَّ معظم الكميات الخارجية ليست داخلية.

في  $\mathbb{R}^3$ ، يمكن لف جزء مسطح من المستوي، أو "حنيه" في أسطوانة نصف قطرها  $r$  دون تغيير أي شيء قد يكشفه العيب في السطح. إنَّ هذا الانحناء يغير التقوس  $\kappa$  لقوس خط عرض الأسطوانة من  $0$  في المستوي إلى  $\frac{1}{r}$  على الأسطوانة؛ ويغير التقوسين الرئيسيين  $\kappa_1, \kappa_2$  من  $0, 0$  إلى  $\frac{1}{r}, 0$ ؛ ويغير التقوس الوسطي  $H$  من  $0$  إلى  $\frac{1}{r}$ . إلا أنَّ تقوس جاوس يبقى  $G = \kappa_1 \kappa_2 = 0$  وفقاً للفرضية. كما هو موضح في الشكل (٣, ٧).

لا يمكن لعيب في المنحنى الكشف عن أي نوع من التقوسات. إلا أنه إذا انتقل العيب إلى السطح، يمكن له الكشف عن تقوس جاوس. بالمناسبة، تظهر صورة كارل فريدريك جاوس على قطعة نقدية فئة ١٠ مارك ألمانية (كما هو موضح في الشكل ٨, ٣).



الشكل (٣, ٧). يغيّر لف سطح مستوي على شكل أسطوانة ذات نصف القطر  $r$  ، التقوسين الرئيسين  $K_1, K_2$  من  $0, 0$  إلى  $0, \frac{1}{r}$  . ويغير التقوس الوسطي  $H = K_1 + K_2$  من  $0$  إلى  $\frac{1}{r}$  . إلا أن تقوس جاوس يبقى  $G = K_1 K_2 = 0$  ، وفقاً لنظرية جاوس إغريغوم.



الشكل (٣, ٨). تظهر صورة كارل فريدريك جاوس على قطعة نقدية فئة ١٠ مارك ألمانية.



## (٣, ٧) تقوس جاوس والمساحة

يستند التعريف الحقيقي لتقوس جاوس  $G$  عند النقطة  $p$  في السطح إلى الصيغة الخاصة بمساحة القرص الذي يكون نصف قطره الداخلي  $r$  عند  $p$  :

$$\pi r^2 - G \frac{\pi}{12} r^4 + \dots \quad (٣, ٨)$$

(بالنسبة للأبعاد العليا، يمكنك الاطلاع على المعادلة (٦, ١٠). سيتم تناول المزيد من الإيضاحات المتعلقة بتقوس جاوس  $G$  في البابين (١, ٨ و ٦, ٨).

## تمارين

(٣, ١) عند النظر في الرسم  $S = \{z = xy\}$  في  $\mathbb{R}^3$ ، المماس للمستوي  $x, y$  عند نقطة الأصل. احسب مباشرة التقوس عند نقطة الأصل بالنسبة للاتجاه الثابت  $\theta$  بالانتقال إلى الإحداثيين القطبيين  $(r, \theta)$  وأخذ المشتقة الثانية بالنسبة إلى  $r$ . أوجد الاتجاهات الرئيسة التي يكون عندها التقوس أكبر أو أصغر. ما هما التقوسان الرئيسان  $K_1, K_2$ ؛ التقوس الوسطي  $H = K_1 + K_2$ ؛ وتقوس جاوس للسطح عند نقطة الأصل؟ ليكن تقوس الاتجاهات على طول المحورين  $x$  و  $y$ . ما هو  $K'_1 + K'_2$ ؟ وما هو  $K'_1 K'_2$ ؟

(٣, ٢) ما التقوسان الرئيسان  $K_1, K_2$ ؟ تقوس جاوس  $G$ ؛ والتقوس الوسطي  $H$  في كل مما يلي؟

(أ) عند نقطة على كرة نصف قطرها  $a$  ؟

(ب) عند نقطة الأصل بالنسبة للرسم  $z = f(x, y) = ax^2 + by^2$  ؟

(ج) عند نقطة الأصل بالنسبة للرسم  $z = f(x, y) = 66x^2 - 24xy + 59y^2$  ؟

(د) عند نقطة الأصل بالنسبة للرسم  $z = f(x, y) = x + 2x^2 + 3y^2 + 5y^3$  ؟

(هـ) عند نقطة عامة على مجسم لولبي  $y \tan z = x$  ؟

(و) عند نقطة عامة على مجسم قطع ناقص  $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$  ؟



(٣, ٣) في الأسطوانة  $\{x^2 + y^2 = a^2\} \subset \mathbb{R}^3$  ذات الإحداثيتين  $u_1 = \theta, u_2 = z$ .

(أ) أوجد البارامترات  $x(\theta, z)$ ؛ أي أوجد  $x, y$  و  $z$  كدوال في  $\theta$  و  $z$ .

(ب) استخدم المعادلة (٣, ٣) لإيجاد الشكل الأساسي الأول  $[g_{ij}]$  واستنتج أن

$$ds^2 = a^2 d\theta^2 + dz^2.$$

(ج) استخدم الشكل الأساسي الأول لحساب طول اللولب  $z = (h/2\pi)\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

الذي يمكنك تعليمه على شكل  $\theta = t, z = (h/2\pi)t$ . تحقق من تطابق إجابتك مع

الإجابة المبينة في الصفحة ٨.

(٣, ٤) بالنسبة للإحداثيين القياسيين  $u_1 = \theta, u_2 = \varphi$  على الكرة التي يبلغ نصف قطرها  $a$ ،

احسب الشكل الأساسي الأول  $[g_{ij}]$ . ثم استخدم الشكل الأساسي الأول لحساب طول الدائرة

ذات خط العرض  $\varphi = c$ .

(٣, ٥) تحقق من أن الجسم اللولبي سطح متناهي الصغر باستخدام الصيغة (٣, ٦) لحساب

$$H = 0 \text{ في الرسم } f(x, y) = x \tan y.$$

(٣, ٦) اشتق الصيغتين (٣-٦) و (٣-٧) من تقوسات الرسم في المعادلتين (٣, ٤) و (٣, ٥).

(٣, ٧) إذا كان السطح الدوراني في  $\mathbb{R}^3$  ينتج من تدوير المنحنى  $x = f(z)$  في المستوي  $x, z$

بالنسبة للمحور  $z$ . تحقق من أن السطح معلّم بالإحداثيين الأسطوانيين  $\theta, z$ ، على النحو التالي

$$\mathbf{x} = (f(z) \cos \theta, f(z) \sin \theta, z)$$

استخدم الفرضية ٣, ٥ لتوضيح أنه يتم التوصل إلى التقوس الوسطي الداخلي باستخدام

$$H = \kappa + \frac{1}{f \sqrt{1+f'^2}} = \kappa + \frac{\cos \theta}{f}, \quad (*)$$

حيث إن  $\kappa$  هو التقوس الداخلي للمنحنى الأصلي  $\kappa = -\left(f'' / (1+f'^2)^{3/2}\right)$  و

$\theta$  هي زاوية المنحنى مع المحور  $z$ . تحقق من الصيغة (\*) بالنسبة لكرة مركزها

نقطة الأصل.

(٣, ٨) تحقق من أن الشكل السلسلي هو السطح متناهي الصغر باستخدام التمرين ٣, ٧ لحساب  $H = 0$  و  $f(z) = \cosh z$ .

(٣, ٩) يتحرك قرص مستو مسطح  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$  بسرعة أولية

$$V = \begin{cases} \left(\frac{1}{4} - x^2 - y^2\right) \mathbf{k} & \text{for } x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}, \\ 0 & \text{for } x^2 + y^2 \geq \frac{1}{4}. \end{cases}$$

ما المعدل الأولي لتغير المساحة؟

(٣, ١٠) استخدم حساب التفاضل والتكامل (حساب التفاضل والتكامل من السنة الأولى) في الإحداثيات الكروية لحساب مساحة القبة القطبية ذات نصف القطر الداخلي  $r$  في كرة نصف قطرها  $a$  للتوصل إلى

$$area = 2\pi a^2 \left(1 - \cos \frac{r}{a}\right)$$

ثم تحقق من الناتج باستخدام المعادلة (٣, ١).



## الفصل الرابع

### السطوح في $\mathbb{R}^n$

يبين هذا الفصل كيفية امتداد نظرية التقوس عند النقطة  $p$  في سطح ثنائي الأبعاد  $S$  من  $\mathbb{R}^3$  إلى  $\mathbb{R}^n$ . كما وضحنا سابقاً، اختر الإحداثيات المتعامدة على  $\mathbb{R}^n$  عندما تكون نقطة الأصل عند  $p$  ويكون  $S$  مماساً للمستوي  $x_1, x_2$  عند  $p$ . عند ذلك يكون المستوى المماس  $T_p S$  للسطح  $S$  عند النقطة  $p$ ، هو المستوى  $x_1, x_2$ ؛ والمتمم المتعامد  $T_p S^\perp$  هو المستوى  $x_3, \dots, x_n$ ؛ و  $S$  محلياً هو رسم الدالة

$$f: T_p S \rightarrow T_p S^\perp$$

يولد أي متجه  $v$  المماس للسطح  $S$  عند النقطة  $p$ ، مع المتجهات الطبيعية لـ  $S$  عند النقطة  $p$ ، فوق المستوى وحيث يتقاطع فوق المستوى مع  $S$  في منحنى. فإنَّ متجه التقوس  $\kappa$  لهذا المنحنى، الذي نسميه التقوس في الاتجاه  $v$ ، هو المشتقة الثانية

$$\kappa: \left( D^2 f \right)_p (v, v)$$

(سيكون لدينا فيما بعد العديد من المتجهات المماسية  $v$ ، حيث نشير إليها بالترميز المكتوب بخط غامق  $v$ ).

يُسمى الشكل الثنائي الخطي  $\left( D^2 f \right)_p$  على  $T_p S$  في  $T_p S^\perp$ ، بالمؤثر الأساسي الثاني  $\Pi$  للسطح  $S$  عند النقطة  $p$ ، مع ترتيب الإحداثيات في مصفوفة متماثلة  $2 \times 2$  وتكون المدخلات في  $T_p S^\perp$ :

$$\mathbf{II} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

مرة أخرى، إنَّ هذه الصيغة جيدة فقط عند النقطة التي يكون فيها السطح مماساً للمستوى  $x_1, x_2$ . إذا كان  $n = 3$ ، فإن هذا المتوتر الأساسي الثاني هو الشكل الأساسي الثاني مضروب في ناظمي الوحدة  $\mathbf{n}$ .

بصورة عامة، لا يمكن لهذه المصفوفة القابلة للاستقطار أن تشكل التقوسات الرئيسة. يُسمى أثر الشكل الأساسي الثاني  $\mathbf{II}$ ،  $a_{11} + a_{22} \in T_p S^\perp$ ، متجة التقوس الوسطي  $\mathbf{H}$ . (إذا كان  $n = 3$ ،  $\mathbf{H} = H\mathbf{n}$ ) وتسمى الكمية القياسية  $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{12}$  تقوس جاوس  $G$ . لا يعتمد التقوس الوسطي  $\mathbf{H}$  ولا تقوس جاوس  $G$  على اختيار الإحداثيات المتعامدة.

وعلى سبيل المثال إذا كان  $\mathbf{H} = (2, 3, 4)$ ،  $n = 5$ ، كعنصر  $\mathbb{R}^3 \cong T_p S^\perp$ ، عنده يكون  $\mathbf{H} = (0, 0, 2, 3, 4)$  كعنصر  $\mathbb{R}^5$ .

ليكن  $G_i$  يشير إلى تقوس جاوس للإسقاط  $S_i \perp S$  في

$$\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2 \times \{0\} \times \cdots \times \mathbf{R}_i \times \cdots \times \{0\} \equiv \mathbf{R}_i^3$$

عندها يكون تقوس جاوس  $G$  للسطح  $S$  عند النقطة  $p$  هو

$$G = \sum_{i=3}^n G_i$$

وذلك لأن الجداء القياسي لمتجهين هو مجموع جداء المركبات.

#### (١، ٤) النظرية

ليكن  $S$  سطحاً متصلاً في  $\mathbb{R}^n$ . يُتوصل إلى التغير الأول لمساحة  $S$  بالنسبة إلى حقل المتجة

$\mathbf{V}$  المتصل الحامل المتراص على السطح  $S$  بتكامل  $\mathbf{V}$  بالنسبة إلى متجة التقوس الوسطي:

$$\delta^1(S) = - \int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{H}.$$

**البرهان:** باعتبار الصيغة خطية في المتجة  $V$ ، يمكننا اعتبار المتغيرات في الاتجاهات  $x_1, x_2, \dots$  بشكلٍ مستقل. بالنسبة لاتجاهات  $x_1, x_2$  التي تتوافق مع تغيير السطح على ذاته  $\delta^1(S) = 0$ ، وفقاً للصياغة. ليكن المتجة  $V$  متغيراً صغيراً في الاتجاه  $x_3$ ، والمساحة متناهية الصغر المربعة  $dx_1 dx_2$  عند  $p$ ، حيث يمكننا افتراض أن مركبة  $x_3$  للشكل الأساسي الثاني  $\Pi$  قطرية:

$$\begin{bmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{bmatrix}$$

أولاً، يتم نقلها إلى مساحة متناهية الصغر

$$(1 \mp |V| \kappa_1) dx_1 (1 \mp |V| \kappa_2) dx_2 \approx (1 - V \cdot H) dx_1 dx_2$$

يلي ذلك الصيغة.

تمتد مفاهيم الإحداثيات المحلية والشكل الأساسي الأول دون تغيير من  $\mathbb{R}^2$  إلى  $\mathbb{R}^n$ . وبالمثل، تُعمّم الفرضية ٣-٥ على النحو التالي.

(٢، ٤) الفرضية

بالنسبة للإحداثيين المحليين  $u_1, u_2$  عند النقطة  $p$  في لسطح  $S$  للمرتبة  $C^2$  في  $\mathbb{R}^n$ ، يشابه الموتر الأساسي الثاني  $\Pi$  عند النقطة  $p$ :

$$(g^{-1})P(D^2\mathbf{x}) = g^{-1} \begin{bmatrix} P(\mathbf{x}_{11}) & P(\mathbf{x}_{12}) \\ P(\mathbf{x}_{12}) & P(\mathbf{x}_{22}) \end{bmatrix},$$

حيث تشير النقطة  $P$  إلى الإسقاط في  $T_p S^\perp$  و

$$x_{ij} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u_i \partial u_j}$$

يكون

(١، ٤)

$$H = \text{trace } g^{-1}P(D^2\mathbf{x})$$

$$= P \frac{x_2^2 x_{11} - 2(x_1 \cdot x_2)x_{12} + x_1^2 x_{22}}{x_1^2 x_2^2 - (x_1 \cdot x_2)^2}$$

(٤, ٢)

$$G = \det \left( g^{-1} P \left( D^2 \mathbf{x} \right) \right)$$

$$= \frac{(P\mathbf{x}_{11}) \cdot (P\mathbf{x}_{22}) - (P\mathbf{x}_{12})^2}{\mathbf{x}_1^2 \mathbf{x}_2^2 - (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2)^2}$$

ملاحظة: بتغير  $T_p S^\perp$  تنغير  $P$  من نقطة إلى أخرى. فإذا كان  $T_p S^\perp$  مستوياً  
 $x_3, \dots, x_n$  ، يكون

$$P(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots) = (0, 0, a_3, a_4, \dots)$$

إذا كان  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  أساسين متعامدين لـ  $T_p S$  ، فإن

(٤, ٣)

$$P(\mathbf{w}) = \mathbf{w} - \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1} \mathbf{x}_1 - \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_2}{\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2} \mathbf{x}_2$$

إذا كان  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  غير متعامدين، نحسب  $P$  من خلال استبدال  $\mathbf{x}_2$  بـ  $\mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1} \mathbf{x}_1$  .

مثال: في السطح

$$\left\{ (w, z) \in \mathbb{C}^2 : w = e^z \right\}$$

نستخدم  $x = \operatorname{Re} z$  و  $y = \operatorname{Im} z$  كإحداثيات. يكون

$$\mathbf{x} = (x, y, e^x \cos y, e^x \sin y)$$

$$\mathbf{x}_1 = (1, 0, e^x \cos y, e^x \sin y)$$

$$\mathbf{x}_2 = (0, 1, -e^x \sin y, e^x \cos y)$$

$$\mathbf{x}_{11} = (0, 0, e^x \cos y, e^x \sin y)$$

$$\mathbf{x}_{12} = (0, 0, -e^x \sin y, e^x \cos y)$$

$$\mathbf{x}_{22} = (0, 0, -e^x \cos y, -e^x \sin y)$$

لاحظ أن  $\mathbf{x}_1^2 = \mathbf{x}_2^2 = 1 + e^{2x}$  ,  $\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = 0$  فإن

$$\mathbf{H} = P \frac{(0,0,0,0)}{(1+e^{2x})^2} = 0.$$

إنه سطح متناهي الصغر. (إن كل تغاير تحليلي معقد هو سطح متناهي الصغر. كما هو موضح في التمرين ٤-٤).

لحساب تقوس جاوس  $G$  ، نحسب أولاً  $P(\mathbf{x}_{ij})$  . في حال أن  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  متعامدان

$$P(\mathbf{x}_{11}) = \mathbf{x}_{11} - \frac{\mathbf{x}_{11} \cdot \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1} \mathbf{x}_1 - \frac{\mathbf{x}_{11} \cdot \mathbf{x}_2}{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2} \mathbf{x}_2 = \frac{(-e^{2x}, 0, e^x \cos y, e^x \sin y)}{1+e^{2x}}.$$

يكون

$$P(\mathbf{x}_{12}) = \frac{(0, -e^{2x}, -e^x \sin y, e^x \cos y)}{1+e^{2x}},$$

$$P(\mathbf{x}_{22}) = \frac{(e^{2x}, 0, -e^x \cos y, -e^x \sin y)}{1+e^{2x}}.$$

تصبح

$$G = \frac{(-e^{4x} - e^{2x}) - (e^{4x} + e^{2x})}{(1+e^{2x})^2 \left[ (1+e^{2x})^2 - 0 \right]} = -\frac{2e^{2x}}{(1+e^{2x})^3},$$

(٤, ٣) نظرية جاوس إغريغوم

وأخيراً، تشير نظرية جاوس إغريغوم، من خلال نفس البرهان المبين في الباب ٣-٦، إلى أن تقوس جاوس  $G$  داخلي عند تحديد الإحداثيين المحليين  $u_1, u_2$  التي يكون فيها  $g = I$  من خلال الصيغة التالية.

$$G = \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u_1 \partial u_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u_1^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u_2^2}$$



## تمارين

(١, ٤) جِد اسقاط  $\mathbb{R}^4 \ni (0,0,2,0)$  في المستوي  $T$  ذي الأساس  $(1,0,2,2), (0,1,-2,2)$  وفي  $T^\perp$ .

ملاحظة: اجعل هذين الأساسين، متجهين متعامدين أولاً.

(٢, ٤) احسب متجة التقوس الوسطي وتقوس جاوس في كل مما يلي:

(أ) في نقطة الأصل للرسم

$$(z, w) = f(x, y) = (x^2 + 2y^2, 66x^2 - 24xy + 59y^2)$$

ثم قارن ذلك بالتمرين ٢, ٣ فقرة (ب, ج).

(ب) في النقطة العامة لـ  $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : w = z^2\}$ .

(٣, ٤) في الطارة  $T^2 = S_1 \times S_1 \subset \mathbb{R}^4$ .

(أ) اكتب  $T^2$  عند  $(0,1,0,1)$  المعروف محلياً برسم الدالة  $(y_1, y_2) = f(x_1, x_2)$ .

(ب) احسب الموتر الأساسي الثاني، والتقوس الوسطي  $H$ ، وتقوس جاوس  $G$  عند  $(0,1,0,1)$ .

(في حال التماثل يكون التقوس الوسطي وتقوس جاوس متشابهين في جميع النقاط.)

(٤, ٤) بيّن أن رسم الدالة التحليلية المعقدة  $f$

$$\{w = f(z)\} \subset \mathbb{C}^2$$

$$H = 0$$

$$G = -2|f''(z)|^2 \left(1 + |f'(z)|^2\right)^{-3}.$$

لاحظ أن رسم الدالة التحليلية المعقدة هو سطح متناهي الصغر. (قارن ذلك مع المثال الذي

تم إيراده بعد الفرضية ٢, ٤).

(٥, ٤) معادلة السطح متناهي الصغر. بيّن أن رسم الدالة  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{n-2}$  سطح متناهي

الصغر إذا وفقط إذا كان

$$\left(1 + |f_y|^2\right) f_{xx} - 2(f_x \cdot f_y) f_{xy} + \left(1 + |f_x|^2\right) f_{yy} = 0$$

قارن ذلك بالصيغة (٦, ٣) بالنسبة للحالة الخاصة  $n = 3$ .

## الفصل الخامس

### السطوح ذات البعد $m$ في $\mathbb{R}^n$

في هذا الفصل نعمل على توسيع نظرية السطوح  $S$  ذات البعد  $m$  للمرتبة  $C^2$  في  $\mathbb{R}^n$ . كما أوضحنا سابقاً اختر الإحداثيات المتعامدة في  $\mathbb{R}^n$  على أن تكون نقطة الأصل عند النقطة  $P$  وتكون  $S$  مماسة للمستوى  $x_1, x_2, \dots, x_m$  عند النقطة  $p$ . فتكون  $S$  محلياً رسم الدالة

$$f : T_p S \rightarrow T_p S^\perp$$

إنَّ متجة الوحدة  $v$  المماس لـ  $S$  عند النقطة  $p$ ، مع المتجهات الطبيعية لـ  $S$  عند النقطة  $p$ ، يولد مستويًا، وهذا المستوى يتقاطع مع السطح  $S$  في منحنى. إنَّ متجة التقوس  $\kappa$  للمنحنى، والذي نطلق عليه اسم التقوس في الاتجاه  $v$ ، ما هو إلا المشتقة الثانية

$$\kappa = \left( D^2 f \right)_p (v, v)$$

يُسمى الشكل الثنائي الخطي  $(D^2 f)_p$  على  $T_p S$  ذو القيم في  $T_p S^\perp$  بالموتر الأساسي الثاني  $\mathbf{II}$  للسطح  $S$  عند النقطة  $p$ ، مع ترتيب الإحداثيات في مصفوفة متماثلة  $m \times m$  وتكون المدخلات في  $T_p S^\perp$  على النحو التالي:

$$\mathbf{II} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} \\ & \ddots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} \end{bmatrix}.$$

يسمى أثر  $\Pi$  بمتجة التقوس الوسطي  $H$ . [بعض الكتب تعرف  $H$  بأنه  $\frac{(\text{trace } \Pi)}{m}$ ].  
**فوق السطوح:** بالنسبة لفوق السطوح  $(n = m + 1)$ ، فإن  $\Pi$  هو ناظمي الوحدة  $\mathbf{n}$  مضروباً في المصفوفة القياسية، ويسمى الشكل الأساسي الثاني ويُرمز بـ  $\Pi$ . لدينا  $H = H\mathbf{n}$  حيث  $H$  هو التقوس الوسطي (القياسي). إذا اخترنا الإحداثيات لجعل الشكل الأساسي الثاني قطعياً

$$\Pi = \begin{bmatrix} \kappa_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \kappa_m \end{bmatrix},$$

عندها يكون  $H = \kappa_1 + \dots + \kappa_m$ . إذا تم توسيع ناظمي الوحدة  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_n)$  محلياً ليكون حقلاً متجهياً، عندها يكون  $\frac{\partial n_n}{\partial x_n} = 0$  في حين أن  $\frac{\partial n_i}{\partial x_i} = -\kappa_i$   $1 \leq i \leq n-1$  [قارن ذلك بالمعادلة (٢-٢)]. بالتالي:

$$H = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial n_i}{\partial x_i} \equiv -\text{div } \mathbf{n}$$

إذا تم تحديد فوق السطح على أنه مجموعة تساوي  $\{f(x_1, \dots, x_n) = c\}$  عندها يكون  $\mathbf{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ ، حيث إن  $\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$ ، و

$$(٥, ١) \quad H = -\text{div} \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$

(٥, ١) النظرية

ليكن  $S$  سطحاً ذا البعد  $m$  للمرتبة  $C^2$  في  $\mathbb{R}^n$ . يُتوصل إلى التغير الأول لمساحة  $S$  بالنسبة إلى حقل المتجهة  $V$  المتصل الحامل المتراص على السطح  $S$  بتكامل  $V$  بالنسبة إلى متجة التقوس الوسطي

$$\delta^1(S) = -\int_S V \cdot H.$$

**البرهان:** باعتبار أن الصيغة الخطية في المتجه  $V$ ، يمكننا اختيار المتغيرات في اتجاهات  $x_1, x_2, \dots, x_n$  بشكل مستقل. بالنسبة لاتجاهات  $x_1, x_2, \dots, x_m$ ، التي تتوافق مع تغيير السطح على ذاته،  $\delta^1(S) = 0$ ، وفقاً للصياغة. ليكن المتجه  $V$  متغيراً صغيراً في اتجاه  $x_j$  ( $m \leq j \leq n$ )، المساحة متناهية الصغر  $dx_1 \dots dx_m$  عند النقطة  $p$ ، وافترض أن مركبة  $x_j$  لـ  $\Pi$ ، قطرية:

$$\begin{bmatrix} \kappa_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \kappa_m \end{bmatrix},$$

أولاً: نُنقل إلى مساحة متناهية الصغر

$$(1 \mp |V| \kappa_1) dx_1 \dots (1 \mp |V| \kappa_m) dx_m \approx (1 - V \cdot H) dx_1 \dots dx_m.$$

يلي ذلك الصيغة.

(٥, ٢) متعدد المتجهات وهندسة الفضاء الجزئي لـ  $\mathbb{R}^n$  ([Mor4] Morgan)

تبيّن هذه الفقرة طريقة تمثيل الفضاء الجزئي ذي البعد  $m$  لـ  $\mathbb{R}^n$  على أنه "جداء إسفين" لمتجهاته الأساسية. عند النظر في  $\mathbb{R}^n$  ذي الأساس  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . هناك طريقة جيدة لضرب  $m$  من المتجهات في  $\mathbb{R}^n$  وذلك للحصول على شيء جديد يسمى متجه  $\zeta$  ذو البعد  $m$ :

$$\zeta = v_1 \wedge \dots \wedge v_m$$

يتميز جداء إسفين بخاصيتين: أولاً: أنه متعدد الخطية:

$$cv_1 \wedge v_2 = v_1 \wedge cv_2 = c(v_1 \wedge v_2),$$

$$(u_1 + v_1) \wedge (u_2 + v_2) = u_1 \wedge u_2 + u_1 \wedge v_2 + v_1 \wedge u_2 + v_1 \wedge v_2$$

ثانياً: أنه متناوب:

$$u \wedge v = -v \wedge u \quad \text{or} \quad u \wedge u = 0$$

على سبيل المثال:

$$\begin{aligned}(2e_1 + 3e_2 - 5e_3) \wedge (7e_1 - 11e_3) &= 14e_1 \wedge e_1 - 22e_1 \wedge e_3 + 21e_2 \wedge e_1 - 33e_2 \wedge e_3 \\ &\quad - 35e_3 \wedge e_1 + 55e_3 \wedge e_3 \\ &= 0 - 22e_1 \wedge e_3 - 21e_1 \wedge e_2 - 33e_2 \wedge e_3 + 35e_1 \wedge e_3 + 0 \\ &= -21e_{12} + 13e_{13} - 33e_{23}\end{aligned}$$

بالتعويض عن  $e_{12}$  بـ  $e_1 \wedge e_2$

بصورة عامة، ينتج عن حساب  $\zeta = v_1 \wedge \dots \wedge v_m$  الإجابة المتمثلة في الشكل

$$\zeta = \sum_{i_1 < \dots < i_m} a_{i_1 \dots i_m} e_{i_1 \dots i_m}$$

إنَّ جميع التركيبات الخطية لـ  $\{e_{i_1 \dots i_m} : i_1 < \dots < i_m\}$  هي فضاء  $\wedge_m \mathbb{R}^n$  لمتجهات من البعد  $m$ ، متجة فضاء الأبعاد  $\binom{n}{m}$ . لديها الجداء الداخلي  $\{e_{i_1 \dots i_m} : i_1 < \dots < i_m\}$  الذي هو أساس متعامد مُعير.

إنَّ هدف المتجة  $\zeta = v_1 \wedge \dots \wedge v_m$  ذا البعد  $m$  هو تمثيل النقطة  $P$  للمستوى القابل للتوجيه  $m$ ، من خلال  $0$  الذي من خلاله يعطي  $v_1, \dots, v_m$  أساساً موجهاً. يتحول جداء إسفين  $\zeta' = v'_1 \wedge \dots \wedge v'_m$  لأساس موجه آخر للنقطة  $P$  إلى مضاعف موجب لـ  $\zeta$ .

على سبيل المثال، يؤدي استبدال  $v'_1 = \sum c_i v_i$  بـ  $u_1$  إلى ما يلي:

$$v'_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_m = c_1 v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_m.$$

إذا أعطي  $v_1, \dots, v_m$  أساساً متعامداً مُعيراً، فعندها يكون لـ  $\zeta = v_1 \wedge \dots \wedge v_m$  الطول 1. ويكون جداء  $v_1, \dots, v_m$  هو  $0$  إذا وفقط إذا كانت المتجهات مرتبطة خطياً. بالنسبة للحالة

$$m = n$$

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_n = \det[v_1, \dots, v_n] \cdot e_{1 \dots n}.$$

يسمى متجة  $\zeta$  ذو البعد  $m$  بسيطاً أو قابلاً للتفريق إذا كان من الممكن صياغته كجداء

إسفين واحد للمتجهات. على سبيل المثال، في  $\wedge_2 \mathbb{R}^4$ ، يكون

(٥، ٦) هو موضح في التمرين ٥-٦. إنَّ المستويات الموجهة ذات البعد  $m$  من خلال نقطة الأصل في  $\mathbb{R}^n$  مقابلة واحد لواحد مع الوحدة، هي متجهات بسيطة ذات البعد  $m$  في  $\wedge_m \mathbb{R}^n$ .  
تحدد العلاقة الهندسية بين المستويين ذوي البعد  $m$  في  $\mathbb{R}^n$  من خلال الزوايا  $m$ ، والتي ظهرت في ١٩٢٩م (راجع Sommerville [Som]، الفصل الرابع، ١٢)، مع تطبيقات حديثة لهندسة جراسمان (راجع Wong [Won]) ولتقليل المساحة (راجع Morgan [Mor1]، ٢-٣).

### (٣، ٥) التقوس المقطعي وتقوس ريمان

يُعين التقوس المقطعي  $K$  للسطح  $S$  عند النقطة  $p$  كل مستو ثنائي الأبعاد  $P \subset T_p S$ ، وإذا علم أنَّ تقوس جاوس في سطح ثنائي الأبعاد هو

$$S \cap (P \oplus T_p S^\perp).$$

إذا أعطي  $v, w$  أساساً متعامداً مُعيّراً للنقطة  $P$ ، عندها يكون التقوس المقطعي وفقاً لتعريفه

$$(٥، ٢) \quad K(P) = \Pi(v, v) \cdot \Pi(w, w) - \Pi(v, w) \cdot \Pi(v, w).$$

على سبيل المثال، إذا كان  $\Pi = [a_{ij}]$  و  $P = e_1 \wedge e_2$  هو مستوى  $x_1, x_2$ ، عندها يكون التقوس المقطعي

$$\begin{aligned} K(P) &= \Pi(e_1, e_1) \cdot \Pi(e_2, e_2) - \Pi(e_1, e_2) \cdot \Pi(e_1, e_2) \\ &= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{12}. \end{aligned}$$

ملاحظة: بالنسبة لفوق السطوح  $(n = m + 1)$  أي مستو ثنائي الأبعاد

$$P = \sum p_{ij} e_i \wedge e_j$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} \kappa_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \kappa_m \end{bmatrix},$$

يكون

$$K(P) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq m} p_{ij}^2 \kappa_i \kappa_j$$

وبالتالي، فإن أي تقوس عرضي  $K(P)$  هو المتوسط الموزون للتقوسات المقطعية  $\kappa_i, \kappa_j$  لمحور المستوى ثنائي الأبعاد  $c_i \wedge c_j$ .

بالنسبة إلى  $\mathbb{R}^n \cong T_p S \times R_1 \times \cdots \times R_{n-m}$ ،  $2 < m < n$ ، إذا كان  $S_i$  يشير إلى إسقاط  $S$  في  $T_p S \times R_i$ ، وكان  $K_i$  يشير إلى التقوس العرضي. فإنه من المعادلة ٥-٢، يكون التقوس العرضي  $K$  للسطح  $S$  محققاً العلاقة  $K = \sum K_i$ .

وبالتالي، يمكن حساب التقوس العرضي لسطح  $S$  ذي البعد  $m$  في  $\mathbb{R}^n$  من خلال استقطار المركبتين  $n-m$  لـ  $\Pi$  بصورة مستقلة، وأخذ المتوسط الموزون المناسب لجداء التقوسات الرئيسة لكل مركب وجمع جميع المركبات.

إذا كانت  $m = n-1$ ، عندها يكون  $\Pi$  شكلاً ثنائياً خطياً متماثلاً ويُسمى الشكل الأساسي الثاني. وتسمى القيم الذاتية لهذه المصفوفة  $k_1, \dots, k_m$  بالتقوسات الرئيسة. باعتبار أن  $(D^2 f)_p$  متماثل، إلا أنه في بعض الإحداثيات المتعامدة يكون قطرياً وتأخذ  $f$  الشكل

$$f = \frac{\kappa_1 x_1^2}{2} + \frac{\kappa_2 x_2^2}{2} + \cdots + \frac{\kappa_m x_m^2}{2} + o(x^2)$$

بصورة عامة، إذا كان  $\Pi = (a_{ij})$ ، فإن الصيغة (٢، ٥) تأخذ الصورة

$$(٥, ٣) \quad K(P) = \left( \sum a_{ik} v_i v_k \right) \cdot \left( \sum a_{jl} w_j w_l \right) - \left( \sum a_{jk} v_k w_j \right) \cdot \left( \sum a_{il} v_i w_l \right) \\ = \sum R_{ijkl} v_i w_j v_k w_l$$

حيث

(٥، ٤)

$$R_{ijkl} = a_{ik} \cdot a_{jl} - a_{jk} \cdot a_{il}$$

ثانويات  $2 \times 2$  لـ  $\Pi$ ، المتوافقة مع الصفين  $i, j$  والعمودين  $k, l$ .

على سبيل المثال، نحصل على  $R_{1234} = a_{13} \cdot a_{24} - a_{14} \cdot a_{23}$  من الصفين 1,2 ومن العمودين 3,4 لـ

$$\mathbf{II} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

حيث  $R_{1212} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$  هو التقوس المقطعي للمستوى  $x_1, x_2$ .

يسمى  $R$  موتر تقوس ريمان. عليه فإن موتر تقوس ريمان هو ثنائيات  $2 \times 2$  الموتر الأساسي الثاني. وبالتالي

(٥, ٥)

$$R_{jikl} = R_{ijkl} \text{ and } R_{ijlk} = -R_{ijkl}$$

(إن استبدال صفين أو عمودين يغير إشارة الثانوي)، و

(٥, ٦)

$$R_{klij} = R_{ijkl}$$

وذلك لأن  $\mathbf{II}$  متماثل. يمكن التحقق بسهولة من المتطابقة الأولى لبيانكي لتبديل آخر ثلاثة

أدلة:

(٥, ٧)

$$R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0$$

للتوصل إلى تعريف  $R$  بعيداً عن اختيار الإحداثيات المتعامدة لـ  $T_p S$ ، وملاحظة أن  $R$  هو الشكل الثنائي الخطي  $\mathbf{II} \wedge \mathbf{II}$  على  $\wedge_2 T_p S$ . فإنه إذا أعطى  $(e_i)$  أساساً لـ  $T_p S$ ، بحيث يعطي  $\{e_k \wedge e_l : k < l\}$  أساساً لـ  $\wedge_2 T_p S$ ، عندها

$$\mathbf{II} \wedge \mathbf{II}(e_k \wedge e_l) = \mathbf{II}(e_k) \wedge \mathbf{II}(e_l) = \left( \sum a_{rk} e_r \right) \wedge \left( \sum a_{sl} e_s \right)$$

و

$$(e_i \wedge e_j) \cdot \mathbf{II} \wedge \mathbf{II}(e_k \wedge e_l) = a_{ik} \cdot a_{jl} - a_{jk} \cdot a_{il} = R_{ijkl}$$

باعتباره شكلاً ثنائياً خطياً على  $\wedge_2 T_p S$ ، يتميز  $R$  بالقيم  $R(\zeta)$  بالنسبة لمتجهي الوحدة  $\zeta \in \wedge_2 T_p S$ . وتحدد  $R$  من خلال التقوسات المقطعية  $P \cdot R(P)$  بالنسبة لمستوي ثنائي الأبعاد (متجهي الوحدة الأساسيين).



إنَّ تقوس ريتشي (Ric) هو شكل ثنائي خطي في  $TPS$ ، ويُعرّف بأنه أحد أنواع أثر تقوس ريمان. باعتبار أن أثر المصفوفة  $[c_{ij}]$  هو مجموع  $\sum c_{ii}$  عبر دليل سفلي مكرر، ويُتوصل إلى إحداثيات  $R_{jl}$  لتقوس ريتشي من العلاقة

$$R_{jl} = \sum_i R_{ijil} \quad (٥, ٨)$$

إذا علمت أن  $R_{ijkl}$  مصفوفة المصفوفات،

$$\begin{bmatrix} [R_{i1k1}] & [R_{i1k2}] & \cdots & [R_{i1km}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [R_{imk1}] & [R_{imk2}] & \cdots & [R_{imkm}] \end{bmatrix}$$

عندها يكون  $R_{jl}$  مصفوفة الآثار المقابلة، لذا فإن تعريف تقوس ريتشي (Ric) بأنه شكل ثنائي خطي لا يعتمد على اختيار الإحداثيات المتعامدة لـ  $TPS$ . ينتج عن تطبيقه على  $e_1$  مجموع التقوسات المقطعية لمستويات المحاور التي تتضمن  $e_1$ :

$$c_1 \cdot \text{Ric}(e_1) = R_{11} = \sum_i R_{i1i1} = \sum_{i \neq 1} R_{i1i1} = \sum_{i=2}^m K(e_1 \wedge e_i).$$

وبالتالي، فإن أي أساس متعامد  $v_1, \dots, v_m$  لـ  $TPS$

$$v_1 \cdot \text{Ric}(v_1) = \sum_{i=2}^m K(v_1 \wedge v_i), \quad (٥, ٩)$$

ولأي وحدة فإن  $v \in T_p S$ ،

$$v \cdot \text{Ric}(v) = \frac{m-1}{\text{vol } S^{m-2}} \int_{\substack{w \perp v \\ w \in T_p S}} K(v \wedge w). \quad (٥, ١٠)$$

وبذا يمكن تفسير تقوس ريتشي بأنه متوسط التقوسات المقطعية.

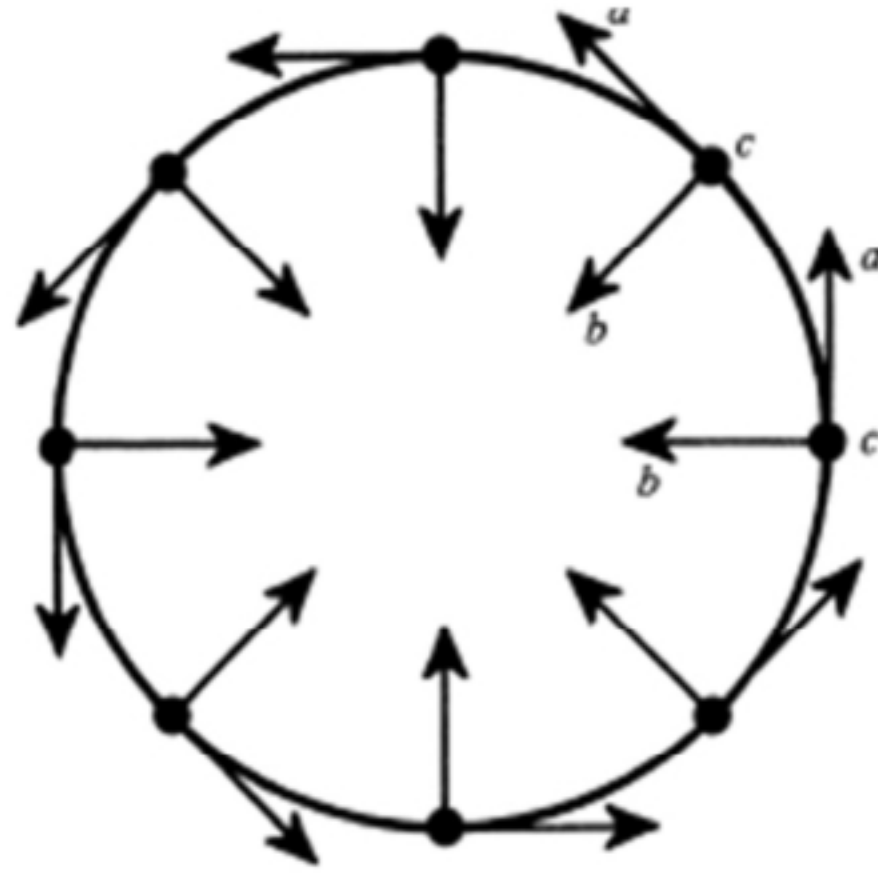
كما يُعرّف التقوس القياسي  $R$  بأنه أثر تقوس ريتشي.

$$(٥, ١١) \quad R = \sum_i R_{ii}.$$

لذلك، فإنه لأي أساس متعامد مُعير  $v_1, \dots, v_m \perp T_p S$ ،

$$(٥, ١٢) \quad R = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m} K(v_i \wedge v_j) = \frac{m(m-1)}{\text{vol } \mathcal{P}} \int_{P \in \mathcal{P}} K(P).$$

حيث  $\mathcal{P}$  هي مجموعة جميع المستويات ثنائية الأبعاد في  $T_p S$ . يكون التقوس القياسي مُتناسباً مع متوسط جميع التقوسات المقطعية عند نقطة معينة. ملاحظة: من المعروف على مر التاريخ أنَّ لتقوس ريتشي رمز المعكوس. حيث إنَّ بعض النصوص تشير إلى أنَّ موتر تقوس ريمان  $R_{ijkl}$  يرمز له بالمعكوس.



الشكل (٥, ١). (أ) حقل المتجهات  $f$  في الدائرة، (ب) اشتقاقه، و(ج) مشتقة متغايرة،  $0$ .

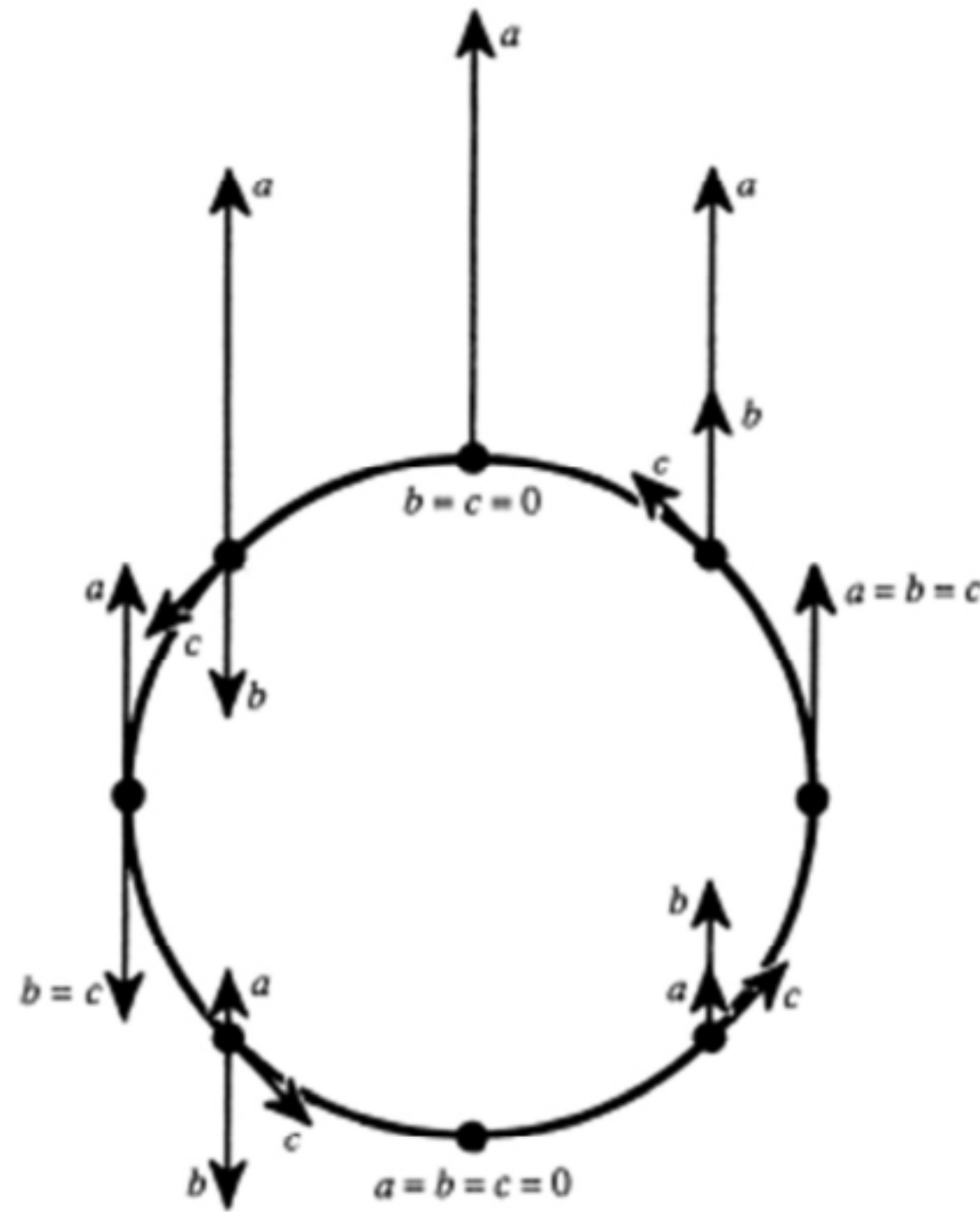
#### (٥, ٤) المشتقة المتغايرة

ليكن  $S$  سطحاً ذا البعد  $m$  للمرتبة  $C^2$  في  $\mathbb{R}^n$ . والدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $S$ ، عندها تكون المشتقة  $\nabla f$  حقل متجهات مماس. إلا أنه إذا كان  $f$  حقل المتجهات (أو حقل المصفوفات أو الموترات) نقطياً في  $T_p S$ ، عندها بصورة عامة ستتضمن المشتقة مركبات ناظرية في  $S$ . ويسمى الإسقاط على  $T_p S$  بالمشتقة المتغايرة. كما هو موضح في الشكلين ٥, ١ و ٥, ٢،

والتمرين ١١, ٥. (الاسم مشتق من خصائص تحويلات معينة ضمن إطار أكثر عمومية؛ كما هو موضح في الفصل السادس).

في الإحداثيات المحلية  $u_1, \dots, u_m$  التي يكون فيها  $g = I$  بالنسبة إلى الرتبة الأولى عند النقطة  $p$ ، يُتوصل إلى إحداثيات المشتقة المتغيرة  $f$  عند النقطة  $p$  بإجراء عدة اشتقاقات جزئية. على سبيل المثال، يُتوصل إلى الإحداثيات  $f_{i;j}$  للمشتقة المتغيرة لحقل المتجهات ذي الإحداثيات  $f_i$  من العلاقة

$$f_{i;j} = f_{i,j} \equiv \frac{\partial f_i}{\partial u_j}.$$



الشكل (٢, ٥). (أ) حقل المتجهات  $f$  في الدائرة، (ب) اشتقاقه، (ج) مشتقة متغيرة.

## تمارين

(٥, ١) أوجد التقوس الوسطي عند نقطة الأصل لـ

$$w = f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 5xz + 6xy + 7yz + 8z^3$$

أ. من حساب الشكل الأساسي الثاني.

ب. كسطح مستو لـ  $g(x, y, z, w) = w - f(x, y, z)$ ، باستخدام الصيغة

$$H = -\operatorname{div} \left( \frac{\nabla g}{|\nabla g|} \right)$$

(٥, ٢) احسب  $(e_1 + 2e_2 + 3e_3) \wedge (e_1 + 2e_2 - 3e_3) \wedge e_4$ .

(٥, ٣) لدينا في النقطة  $P$  للمستوى ثنائي الأبعاد في  $\mathbb{R}^4$  المعطى على الصورة

$$P = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 + x_3 = x_3 + x_4 = 0\}$$

أوجد الأساس غير المتعامد  $u, v$  والأساس المتعامد المعيار  $w, z$  للنقطة  $P$ . تحقق من

خلال الحساب المباشر أن  $u \wedge v$  مضاعف لـ  $w \wedge z$  وأن  $|w \wedge z| = 1$ .

(٥, ٤) تحقق من خلال الحساب المباشر أن

$$(e_1 + 2e_2 + 3e_3) \wedge (e_1 - e_3) \wedge (e_2 + e_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} e_{123}$$

(٥, ٥) أثبت أن المتجة ثنائي البعد  $e_{12} + 2e_{13} + 2e_{23}$ ، بسيط.

(٥, ٦) أثبت أن  $e_{12} + e_{34}$  ليس بسيطاً.

(٥, ٧) من المبادئ الأولى (دون حسابات)، بين سبب كون جميع التقوسات المقطعية حول كرة

$S^m(a)$  ذات البعد  $m$  التي نصف قطرها  $a$  هي  $\frac{1}{a^2}$ ، وبالتالي يكون التقوس القياسي

$R = m(m-1)/a^2$ . تذكر أنه في التمرين ٤-٣، بالنسبة للطارة  $S^1(a) \times S^1(b)$ ، يكون تقوس

جاوس مساوياً ٠. استخدم هذه الحقائق لاستنتاج مختلف التقوسات المقطعية  $K(e_i \wedge e_j)$  لـ

$S^2(a) \times S^3(b) \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^7$  عند  $p = (0, 0, n; 0, 0, 0, b)$  مع الاتجاهات المماسية

$e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$ ، وتحقق أنه في هذه الحالة تكون الصيغة العامة لجداء التقوس القياسي هي:

$$R_{S_1 \times S_2}(p) = R_{S_1}(p_1) + R_{S_2}(p_2)$$

(٥, ٨) افترض أن الشكل الأساسي الثاني عند النقطة  $p$  لسطح  $S$  ثلاثي الأبعاد في  $\mathbb{R}^5$  هو

$$\mathbf{II}(p) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

(أ) جد  $K(e_1 \wedge e_2)$  من التعريف.

(ب) استخدم المعادلة (٢-٥) لإيجاد  $K(P)$  إذا كان  $P$  الأساس المتعامد مُعير

$$\cdot \frac{(e_1 + e_2)}{\sqrt{2}}, \frac{(e_1 - e_2 + e_3)}{\sqrt{3}}$$

(ج) احسب موتر تقوس ريمان  $R_{ijkl}$ . (باستخدام المعادلة (٥-٥)، يمكنك افتراض

$1 \leq i < j \leq 3, 1 \leq k < l \leq 3$ ، لديك تسعة مركبات فقط ينبغي حسابها، بعضها متساو

باستخدام المعادلة (٥-٦). تحقق من المطابقة الأولى لبيانكي باستخدام المعادلة (٥-٧)،

حيث  $ijkl = 1223$ .

(د) استخدم الفقرة (ج) والمعادلة (٥-٣) للتحقق من الفقرة (أ) و(ب).

(٥, ٩) هذه المسألة تدرس التقوس عند نقطة الأصل لسطح ثلاثي الأبعاد في  $\mathbb{R}^5$  المعطى بهذه

الصورة

$$y_1 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 5x_3^2,$$

$$y_2 = 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2.$$

(أ) ما هو  $\mathbf{II}$  (عند نقطة الأصل)؟

(ب) ما هو التقوس المقطعي للمستوي  $x_1, x_2$ ؟

(ج) ما هو التقوس المقطعي للمستوي  $x_1 + x_2 = 0$ ؟ وللمستوي  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ ؟

(د) أذكر جميع مركبات موتر تقوس ريمان. واستخدمها لإعادة حساب إجابتي الفقرتين (ب)

و(ج).

(هـ) احسب تقوس ريتشي والتقوس القياسي.

(٥, ١٠) لدينا النقطة  $p = (0, 0, 0, -a)$  حول فوق الكرة ثلاثية الأبعاد  $S$  التي يبلغ نصف قطرها  $a$  حوالي 0 في  $\mathbb{R}^4$ :

$$S = \{x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = a^2\}$$

- (أ) جد الدالة  $f(x, y, z)$  بحيث يكون  $S$  رسم  $f$  بالقرب من النقطة  $p$ .
- (ب) بين أنه عند النقطة  $p$ ، يكون الشكل الأساسي الثاني  $\mathbf{II}$  هو  $1/a$  مضروباً في المصفوفة المحايدة. (مستفيداً من التماثل، يكفي حساب  $f_{xx}$  و  $f_{xz}$  عند النقطة  $p$ ).
- (ج) مستفيداً من الفقرة (ب)، ما هو التقوس الوسطي القياسي  $H$  عند النقطة  $p$ ؟ ما هو متجه التقوس الوسطي  $\mathbf{H}$  عند النقطة  $p$ ؟
- (د) استخدم (ب) لتوضيح أن كل تقوس مقطعي  $K(v, w)$  بالنسبة لمتجهات متعامد معيّر  $v, w$  هو  $1/a^2$ .
- (هـ) استخدم (ب) لحساب موتر تقوس ريمان  $R_{ijkl}$ .
- (و) استخدم (هـ) لإثبات أن كل تقوس مقطعي هو  $1/a^2$ .
- (ز) استخدم (هـ) لحساب تقوس ريتشي  $R_{j1}$ .
- (ح) استخدم (ز) لحساب التقوس القياسي  $R$ .
- (ط) احسب الآن  $H$  عند كل نقطة في  $S$  معتبراً معاينة فوق الكرة السطح المستوى للدالة  $g(x, y, z, w)$  مستخدماً الصيغة  $H = -\text{div}(\nabla g / |\nabla g|)$ .
- (ي) استخدم متغيرات  $S$  المعطاة

$$\mathbf{x}(u_1, u_2, u_3) =$$

$$a(\sin u_1 \cos u_2, \sin u_1 \sin u_2, \cos u_1 \cos u_3, \cos u_1 \sin u_3),$$

لإثبات أن الشكل الأساسي الأول هو

$$ds^2 = a^2 du_1^2 + a^2 \sin^2 u_1 du_2^2 + a^2 \cos^2 u_1 du_3^2.$$

(ك) يتحدد مكان العيب على السطح  $S$  من العلاقة

$$\mathbf{x}(t) = a(\cos t, \sin t, 0, 0), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

ما متجة السرعة  $v$ ؟ وما متجة مماس الوحدة  $T$ ؟ وما متجة التقوس  $\kappa$ ؟ وما إسقاط  $\kappa$  على المستوي المماس للسطح؟ وما طول مسار العيب؟ تحقق من الطول باستخدام إجابتك على الفقرة

(ي) (لاحظ أنه يتحدد مسار العيب بوضع  $u_1 = \frac{\pi}{2}, u_2 = t, u_3 = 0$ ).

(٥, ١١) لدينا حقل المتجهات  $\mathbf{f} = y^2 \mathbf{i} + (x+z) \mathbf{j} + yz \mathbf{k}$  في  $\mathbb{R}^3$ :

(أ) احسب المشتقة عند نقطة عامة في  $\mathbb{R}^3$ .

(ب) احسب المشتقة المتغيرة عند  $(0,0,1)$  في كرة الوحدة.

(٥, ١٢) بين أنه بالنسبة لرسم الدالة  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$

$$H = \operatorname{div} \frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} = \frac{(1+|\nabla f|^2) \nabla f - \sum f_i f_j f_{ij}}{(1+|\nabla f|^2)^{3/2}},$$

حيث

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

$$f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

$$\nabla f = (f_1, \dots, f_{n-1}),$$

$$\operatorname{div}(p, q, \dots) = p_1 + q_1 + \dots,$$

$$\Delta f = \operatorname{div} \nabla f = f_{11} + f_{22} + \dots \text{ و}$$

(٥, ١٣) أثبت صيغة  $K(P)$  في الملاحظة المبينة في الصفحة ٩.

(٥, ١٤) يُعرّف الفضاء الإسقاطي المعقد  $\mathbb{CP}^n$  بأنه فضاء الخطوط المعقدة (مستويين ثنائيي البعد)

في  $\mathbb{C}^{n+1}$ . على سبيل المثال

$$\mathbb{CP}^1 = \{v \wedge iv : v \in \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2\}.$$

بين أن  $\mathbb{CP}^1$  تقوس جاوس ثابتاً وهو  $G = 2$ .

ملاحظة: بالتماثل يمكننا حساب  $G$  عند  $e_1 \wedge ie_1$ . وتحسب النقاط الأخرى  $x$  بتدوير  $e_1$  نحو متجة الوحدة العمودي  $v$ :

$$x = (c_1 e_1 + s_1 v) \wedge (c_1 i e_1 + s_1 i v),$$

حيث:  $v = c_2 e_2 + s_2 i e_2$ ,  $c_j = \cos \theta_j$ ,  $s_j = \sin \theta_j$ ,  $0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq \theta_2 \leq 2\pi$

ليكن  $r = s_1$ ,  $x = r c_2$ ,  $y = r s_2$  للرتبة الثانية

$$x = (1 - x^2 - y^2, \sqrt{2}x, \sqrt{2}y, x^2 + y^2)$$

(بالنسبة للأساس العمودي المعياري لـ  $\mathbb{R}^4$ ). استخدم الآن المعادلة (٤-٢) عند

$$e_1 \wedge i e_1 \quad (x = y = 0)$$

ملاحظة: يتبع هذا أن  $\mathbb{CP}^1$  كرة مدورة نصف قطرها  $1/\sqrt{2}$ . كتغير بديل، يعطي بمقاس

ما يُسمى دراسة فوبيني، نصف قطر  $\mathbb{CP}^1$  هو  $1/2$  والتقوس هو 4.





## الهندسة الريمانية الداخلية

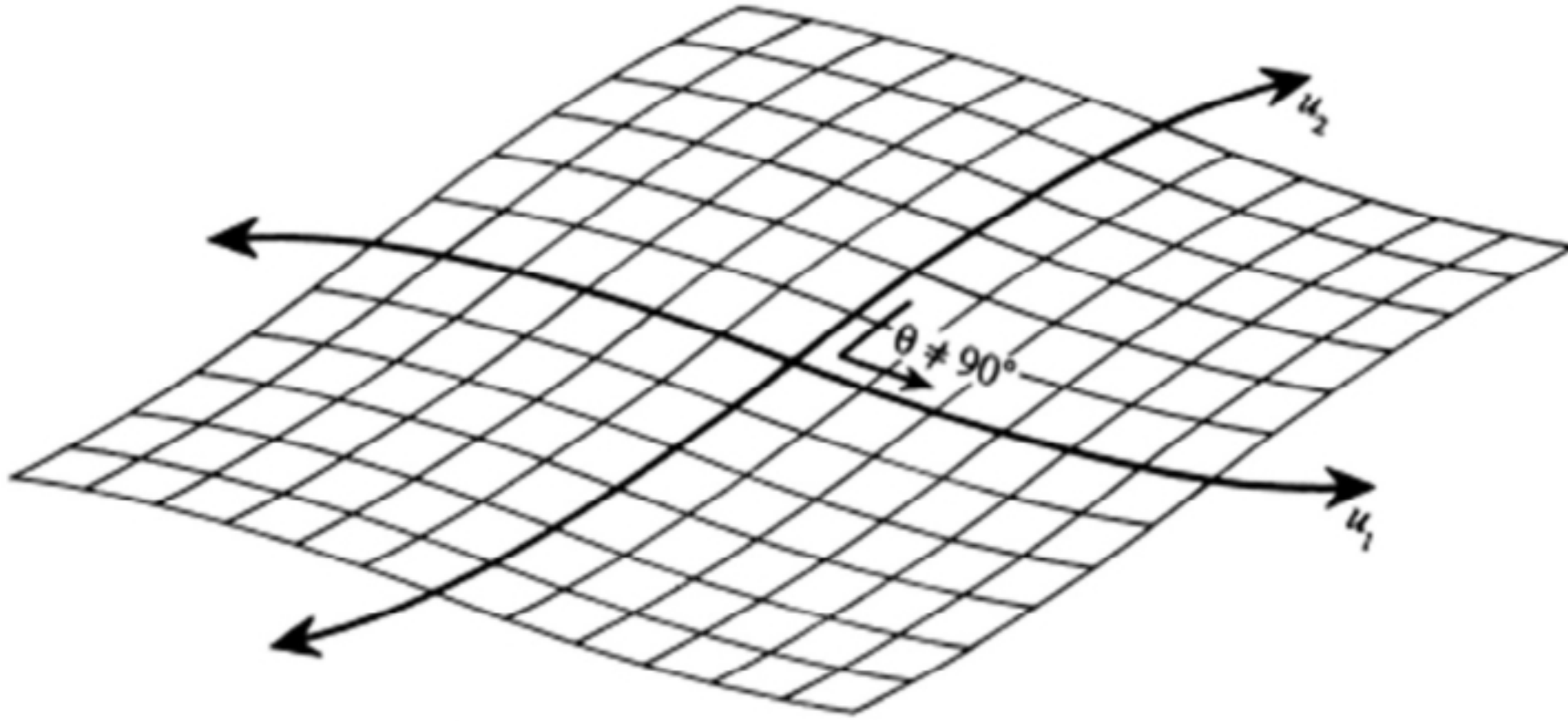
باعتبار أن الكميات الهندسية التحليلية الداخلية للسطح الناعم  $S$  ذي البعد  $m$  في  $\mathbb{R}^n$ ، تتفادى الدراسات المعرفة حول محيط  $\mathbb{R}^n$ . يُعرّف سطح  $S$  بأنه منطو طوبولوجي يغطيه مخطط الإحداثيات المتوافقة  $C^\infty$ ، مع "مقياس ريمان"  $g$  (أي مصفوفة معرفة ناعمة موجبة). لا يعد ذلك إطاراً أكثر عمومية، باعتبار J. Nash [Nas] أثبت أنه يمكن طمر كل منطو ريماني مجرد بشكل متشابه في بعض  $\mathbb{R}^n$ . افترض أنه إطار أكثر طبيعية، إلا أن الصيغ أكثر تعقيداً.

لقد لاحظنا حتى الآن كمية داخلية واحدة، وهي تقوس جاوس  $G$  لسطح ثنائي الأبعاد في  $\mathbb{R}^n$ . وأثبتنا أن تقوس جاوس  $G$  داخلي من خلال اشتقاق صيغة تقوس جاوس  $G$  من حيث المقياس.

قد يظن البعض أن هندسة ريمان الداخلية هي مجرد مجموعة كبيرة من الصيغ، وبالتالي إثبات أن الكميات الداخلية مثل تقوس ريمان، والتقوس المقطعي، والمشتقات المتغيرة. وقد استخدم المنهج القياسي هذه الصيغ كتعريفات. إننا نستفيد من التعريفات الخارجية البسيطة. حيث تصبح الصيغ أكثر تعقيداً في الإحداثيات المحلية الداخلية.

تنجم التعقيدات من عدم كون الإحداثيات المحلية متعامدة، كما هو موضح في الشكل (١، ٦). إن محور  $u_1$  ليس متعامداً على مجموعة المستوى  $\{u_1 = 0\}$ ؛ أو إن متجة الوحدة

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial u_1} \text{ ليس متعامداً على مجموعة المستوى } \{du_1 = 0\}.$$



الشكل (١, ٦). بالنسبة للإحداثيات غير المتعامدة، لا يكون محور  $u_1$  متعامداً على محور  $u_2$  (مجموعة المستوى  $\{u_1 = 0\}$ ). وأنَّ متجه الوحدة  $e_1 = \frac{\partial}{\partial u_1}$  ليس متعامداً على مجموعة المستوى  $\{du_1 = 0\}$ .

فتكون مركبات حقل المتجه على هذه الصورة

$$X = (X^1, X^2, \dots, X^m) = \sum X^i e_i = \sum X^i \frac{\partial}{\partial u^i}$$

وتكون مركبات التفاضل

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m) = \sum \varphi_i du^i$$

مختلفة جداً، في ظل تغيير الإحداثيات على سبيل المثال. ولإثبات التميز، يتم استخدام الدليل العلوي في مركبات كالمتجه، أو مخالف التغير، والموترات، ويتم استخدام الأدلة العلوية في مركبات كالتفاضل، أو موافق التغير، والموترات.

وبالتالي، فإنَّ لحقل المتجه  $X$  مركبات  $X^i$ . وللمشتقة المتغيرة مركبات  $X^i_{;j}$ ، التي تتميز بالفاصلة المنقوطة عن المشتقات الجزئية  $X^i_{;j} = \frac{\partial X^i}{\partial u^j}$ . كما أشرنا في التمرين الأول لهندسة ريمان الداخلية، ونبرهن أنه يُتوصل إلى مركبات المشتقة المتغيرة، من الصيغة

$$(١, ٦) \quad X^i_{;j} = X^i_{,j} + \sum_k \Gamma^i_{jk} X^k,$$

حيث  $\Gamma_{jk}^i$  هي رموز كريستوفل

$$(٦, ٢) \quad \Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \sum_l g^{il} (g_{lj,k} + g_{lk,j} - g_{jk,l}),$$

بحيث تكون معرفة من حيث المشتقات الجزئية للمقياس  $g_{ij}$  ومعكوسة  $g^{ij}$  على وجه الخصوص، إن المشتقة المتغيرة هي ترميز داخلي.

في الصيغة (٦, ١)، تعطي المشتقة الجزئية الحد الرئيس الأول. هناك حدود إضافية لأن متجهات الأساس ذاتها مقلوبة.

في الصيغتين (٦, ١) و (٦, ٢)، لاحظ أن كلاً من المؤشرات  $i$ ، أو  $j$ ، أو  $k$  الموجودة على اليسار تحدث في الموقع ذاته (كدليل سفلي أو كدليل علوي) على اليمين. لاحظ كيف أن التجميع يتجاوز المؤشر  $k$  أو  $l$  الذي يظهر كدليل سفلي وكدليل علوي على حد سواء. من خلال هذه الاصطلاحات، يرتبط ترميزنا بالتغير (covariance) ومُخالف التغير (contravariance).

تعتبر بعض المعالجات لمفاضلة المتغيرة  $\Gamma_{jk}^i$  في المنطويات دون مقاييس. كما تسمى المفاضلة المتغيرة بصلة ولأنه من خلال توفير تفاضل حقل المتجة، فهو يعطي بعض الصلة بين الفضاءات المماسية للسطح  $S$  في نقاط مختلفة. إن اتصالنا القانوني الذي ينبثق من مقياس ريمان ("Levi-Civita connection")، يكون متماثلاً، لذا فإن الالتواء يساوي 0:

$$(٦, ٣) \quad T_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i = 0.$$

ويُتوصل إلى تقوس ريمان من الصيغة التالية

$$(٦, ٤) \quad R_{jkl}^i = -\Gamma_{jk,l}^i + \Gamma_{jk,l}^i + \sum_h \left( -\Gamma_{jk}^h \Gamma_{hl}^i + \Gamma_{jl}^h \Gamma_{hk}^i \right).$$

ولذا، فإن تقوس ريمان داخلي، وذلك لأن الصلة  $\Gamma_{jk}^i$  داخلية أيضاً. لاحظ أن كل مؤشر على اليسار يحدث في الموقع ذاته على اليمين، وأن التجميع يتجاوز المؤشر  $h$  الذي يظهر كدليل سفلي ودليل علوي على حد سواء.

لا تزال التناظرات القديمة  $(٥, ٥) - (٥, ٧)$  محققة بالنسبة للموتر ذي العلاقة

$$R_{ijkl} = \sum_h (g_{ih} R_{jkl}^h).$$

$$, R_{jkl}^i = \sum_h (g^{ih} R_{h jkl})$$

(٦, ٥)

$$R_{jlk}^i = -R_{jkl}^i,$$

إلا أنه بصورة عامة  $R_{ikl}^j \neq -R_{jkl}^i$ . على سبيل المثال، ليس بالضرورة أن ينعدم  $R_{2kl}^2$ . ولا تزال المتطابقة الأولى لـ (Bianchi) قائمة:

(٦, ٦)

$$R_{jkl}^i + R_{klj}^i + R_{ljk}^i = 0$$

ونحصل على تقوس ريتشي من الصيغة

(٦, ٧)

$$R_{jl} = \sum_i R_{jil}^i,$$

ونحصل على التقوس القياسي من الصيغة

(٦, ٨)

$$R = \sum g^{jl} R_{jl}.$$

وكذلك نحصل على التقوس المقطعي لمستوي ذي الأساس المتعامد  $v, w$  من الصيغة

(٦, ٩)

$$K(v \wedge w) = \sum_{i,j,k,l} R_{ijkl} v^i w^j v^k w^l.$$

إذا كان  $S$  سطحاً ثنائي الأبعاد، فإن تقوس جاوس هو  $G = \frac{R}{2}$ . لاحظ أنه إذا كان

$g = I$  عند النقطة  $p$ ، وعندها يكون

$$\Gamma_{jk}^i = 0,$$

$$\Gamma_{;j}^i = \Gamma_{,j}^i,$$

$$R_{ijkl} = R_{jkl}^i = -\Gamma_{jk,l}^i + \Gamma_{jl,k}^i,$$

$$R_{jl} = \sum_i R_{jil}^i,$$

$$R = \sum R_{jj},$$

و

$$K(v \wedge w) = \sum R_{jkl}^i v^i w^j v^k w^l.$$

ملاحظة: يمكن تأسيس التعريف الداخلي للثقب القياسي  $R$  عند النقطة  $p$  في سطح  $S$  ذي البعد  $m$  على صيغة حجم كرة نصف قطرها الداخلي  $r$  عند النقطة  $p$ :

$$(6, 10) \quad \text{volume} = \alpha_m r^m - \alpha_m \frac{R}{6(m+2)} r^{m+2} + \dots,$$

حيث  $\alpha_m$  هو حجم الكرة في  $\mathbb{R}^m$ . عندما يكون  $m = 2$ ، تُختصر هذه الصيغة للمعادلة (3, 8). وتلعب الصيغة المماثلة للكرات دوراً في  $\mathbb{R}$ . حل شوين (R.Schoen's solution) لمسألة يامابي (Yamabe problem) المتعلقة بإيجاد تشوه متواز لمقياس ريمان المحدد لأحد الثقبوسات القياسية الثابتة (كما هو موضح في شوين [Sch. Lemma 2]).

#### (6, 1) صيغة مفيدة إضافية

هناك بعض الصيغ الخاصة اللازمة في بعض الأحيان. فيمكننا الحصول على المشتقة المتغيرة لموتر العام  $f$  من خلال الصيغة

$$(6, 11) \quad f_{i_1 \dots i_r; k}^{j_1 \dots j_s} = f_{i_1 \dots i_r, k}^{j_1 \dots j_s} + \sum_m \Gamma_{mk}^1 f_{i_1 \dots i_r}^{mj_2 \dots j_s} + \dots \\ + \sum_m \Gamma_{mk}^{j_s} f_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_{s-1} m} - \sum_m \Gamma_{ki_1}^m f_{mi_2 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} - \dots - \sum_m \Gamma_{ki_r}^m f_{i_i \dots i_{r-1} m}^{j_1 \dots j_s}.$$

تشير تمهيدية ريتشي إلى أن المشتقة المتغيرة للمقياس هي 0.

$$(6, 12) \quad g_{ij; k} = g_{; k}^{ij} = 0.$$

بصورة عامة، إن المشتقات المتغيرة الجزئية المختلطة لحقل المتجهات  $X$  ليست متساوية. تعطي متطابقة ريتشي صيغة جميلة جداً فيما يتعلق بفرق الحدود في ثقبوس ريمان:

(٦, ١٣)

$$X^i_{;j;k} - X^i_{;k;j} = -\sum_h R^i_{hjk} X^h.$$

وبالتالي، توفر متطابقة ريتشي وصفاً بديلاً لتقوس ريمان على أنها عدم تساوي الأجزاء المختلطة. في الصياغات الداخلية لهندسة ريمان تتحول متطابقة ريتشي أحياناً إلى تعريف تقوس ريمان.

(٦, ٢) البراهين

هناك طريقتان لإثبات الصيغ الداخلية لهندسة ريمان: إما مباشرة باستخدام التعريفات الخارجية وإما بشكلٍ داخلي باستخدام الثبات في ظل تغير الإحداثيات. وكمثال، سوف نثبت صيغة المشتقة المتغيرة لحقل المتجهات بالطريقتين ثم نقارن بينهما.

البرهان الخارجي للمعادلة (٦, ١). في حقل المتجهات القابلة للتفاضل

$$X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial u^i} = \sum_{k,m} X^k \frac{\partial x^m}{\partial u^k} \frac{\partial}{\partial x^m}.$$

تحقق المشتقة الجزئية العادية

(٦, ١٤)

$$\frac{\partial X}{\partial u^j} = \sum_i X^i_{,j} \frac{\partial}{\partial u^i} = \sum_{k,m} X^k \frac{\partial^2 x^m}{\partial u^j \partial u^k} \frac{\partial}{\partial x^m}$$

من خلال قاعدة الجداء. للتوصل إلى المشتقة المتغيرة، نُسقط المشتقة في  $TPS$ ، أو مولد

$x_1, x_2, \dots, x_m$ ، أو فضاء عمودي، أو نطاق المصفوفة

$$A = \left[ \frac{\partial x^i}{\partial u^j} \right].$$

هناك حقيقة معروفة في الجبر الخطي تفيد بأن مصفوفة الإسقاط هي:

$$P = A \left( A^t A \right)^{-1} A^t = A g^{-1} A^t$$

(إن  $A$  ليست مربعة عموماً، إلا أن  $A^t A$  مربعة وقابلة للعكس.)

في المعادلة (١٤, ٦)، يكون التجميع الأول عبر  $i$  في  $TPS$  حقاً. عند النظر في التجميع الثاني  $k, m$ . للتوصل إلى معامل الاختلاف  $\frac{\partial}{\partial x^n}$  في الإسقاط، نضرب معامل الاختلاف  $\frac{\partial}{\partial x^m}$  في المعادلة (١٤, ٦) باستخدام المدخل  $n, m$  لـ  $P = Ag^{-1}A^t$ ، الذي هو

$$\sum_{i,l} \frac{\partial x^n}{\partial u^i} g^{il} \frac{\partial x^m}{\partial u^l},$$

للتوصل إلى

$$\sum \frac{\partial x^n}{\partial u^i} g^{il} \frac{\partial x^m}{\partial u^l} \frac{\partial^2 x^m}{\partial u^j \partial u^k} X^k \frac{\partial}{\partial x^n} = \sum_i \left( \sum_l g^{il} \mathbf{x}_{jk} \cdot \mathbf{x}_l \right) X^k \frac{\partial}{\partial u^i}.$$

يكون

$$X^i_{;j} = X^i_{,j} + \sum_k \Gamma^i_{jk} X^k,$$

حيث

$$\begin{aligned} \Gamma^i_{jk} &= \sum_l g^{il} \mathbf{x}_{jk} \cdot \mathbf{x}_l \\ &= \sum_l g^{il} \left( \frac{1}{2} \right) \left[ (\mathbf{x}_l \cdot \mathbf{x}_j)_k + (\mathbf{x}_l \cdot \mathbf{x}_k)_j - (\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{x}_k)_l \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_l g^{il} (g_{lj,k} + g_{lk,j} - g_{jk,l}). \end{aligned}$$

لاحظ كيف أننا في الخطوات الأخيرة تحولنا من الكميات الخارجية  $\mathbf{x}_{jk}$  إلى الكميات الداخلية  $g_{rs,t}$ .

برهان عدم التباين للمعادلة (١, ٦). في طريقة البرهان هذه، نتحقق أولاً من صيغة الإحداثيات التي يكون فيها  $g = I$  عند النقطة  $p$  ثابتاً في ظل تغير الإحداثيات.



إذا كان  $g = I$ ، تفيد المعادلة (١, ٦) أن  $X^i_{;j} = X^i_{,j}$ ، وهو ما نقبله بعد القليل من التفكير. للتحقق من عدم التباين، يجب علينا أن نبيّن أنه إذا كان  $u^i, u^{i'}$  يعطيان الإحداثيات عند النقطة  $p$ ، يكون

$$X^{i'}_{;j} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^m} \frac{\partial u^n}{\partial u^{j'}} X^m_{;n},$$

حيث إننا نتفق على تجميع الأسس المكررة. (قد يكون الحصول على هذه الصيغ - لمعرفة ما إذا كان  $\partial u^{i'}$  يصعد للأعلى أم ينخفض للأسفل - الجزء الأصعب من الجبر الخطي، إلا أن مصطلحاتنا الدليلة تجعل الأمر تلقائياً.) إن هذا التحقق هو أمر مريب، إلا أننا سنتطرق إليه. نلاحظ أولاً أن:

$$g'_{jl} = \frac{\partial u^r}{\partial u^{j'}} \frac{\partial u^s}{\partial u^{l'}} g_{rs}.$$

بالتالي فإن

$$g'_{jl,k} = \frac{\partial u^r}{\partial u^{j'}} \frac{\partial u^s}{\partial u^{l'}} \frac{\partial u^t}{\partial u^k} g_{rs,t} + \left[ \frac{\partial^2 u^r}{\partial u^{j'} \partial u^{k'}} \frac{\partial u^s}{\partial u^{l'}} + \frac{\partial u^r}{\partial u^{j'}} \frac{\partial^2 u^s}{\partial u^{l'} \partial u^{k'}} \right] g_{rs}.$$

وُستخدم المعادلات ذاتها بالنسبة لـ  $-g_{jk,l}, g_{kl,j}$ . وبجمع المعادلات الثلاث مع تعريف  $\Gamma^{i'}_{jk}$  و

$$g^{il'} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^p} \frac{\partial u^{l'}}{\partial u^q} g^{pq}.$$

نحصل على

$$\Gamma^{i'}_{jk} = \frac{1}{2} \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^p} \frac{\partial u^{l'}}{\partial u^q} g^{pq} \left( \frac{\partial u^r}{\partial u^{j'}} \frac{\partial u^s}{\partial u^{l'}} \frac{\partial u^t}{\partial u^k} [g_{rs,t} - g_{rt,s} + g_{ts,r}] + \Omega \right),$$

حيث

$$\begin{aligned}\Omega &= g_{rs} \left[ \frac{\partial^2 u^r}{\partial u^{j'} \partial u^{k'}} \frac{\partial u^s}{\partial u^{l'}} + \frac{\partial u^r}{\partial u^{j'}} \frac{\partial^2 u^s}{\partial u^{l'} \partial u^{k'}} - \frac{\partial^2 u^r}{\partial u^{j'} \partial u^{l'}} \frac{\partial u^s}{\partial u^{k'}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial u^r}{\partial u^{j'}} \frac{\partial^2 u^s}{\partial u^{k'} \partial u^{l'}} + \frac{\partial^2 u^r}{\partial u^{k'} \partial u^{j'}} \frac{\partial u^s}{\partial u^{l'}} + \frac{\partial u^r}{\partial u^{k'}} \frac{\partial^2 u^s}{\partial u^{j'} \partial u^{l'}} \right] \\ &= 2g_{rs} \left[ \frac{\partial^2 u^r}{\partial u^{j'} \partial u^{k'}} \frac{\partial u^s}{\partial u^{l'}} \right],\end{aligned}$$

ولأن  $g_{rs}$  تناظري. بالتالي فإن:

$$\Gamma_{jk}^{i'} = \frac{1}{2} \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^p} \frac{\partial u^r}{\partial u^{j'}} \frac{\partial u^t}{\partial u^{k'}} \delta_q^s g^{pq} (g_{rs,t} - g_{rt,s} + g_{ts,r}) + \frac{\partial^2 u^r}{\partial u^{j'} \partial u^{k'}} \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^p} \delta_q^s g^{pq} g_{rs},$$

حيث:  $\delta_q^s = 1$  إذا كان  $s = q$  و  $0$ .

في حالاتٍ أخرى. باعتبار  $\delta_r^p = g^{pq} g_{qr} = \delta_r^p$

$$\begin{aligned}\Gamma_{jk}^{i'} &= \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^p} \frac{\partial u^r}{\partial u^{j'}} \frac{\partial u^t}{\partial u^{k'}} \left[ \frac{1}{2} g^{ps} (g_{rs,t} - g_{rt,s} + g_{ts,r}) \right] + \frac{\partial^2 u^r}{\partial u^{j'} \partial u^{k'}} \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^p} \\ &= \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^p} \frac{\partial u^r}{\partial u^{j'}} \frac{\partial u^t}{\partial u^{k'}} \Gamma_{rt}^p + \frac{\partial^2 u^h}{\partial u^{j'} \partial u^{k'}} \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^h},\end{aligned}$$

وبتغيير الدليل الشكلي في الحد الأخير من  $r$  إلى  $h$ .

إنَّ ضرب كلا الضلعين بـ  $\frac{\partial u^h}{\partial u^{i'}}$  وتغيير الأعداد الأولية والأدلة، ينتج أنَّ

$$(٦, ١٥) \quad \frac{\partial^2 u^{i'}}{\partial u^m \partial u^l} = \Gamma_{lm}^h \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^h} - \Gamma_{hk}^{i'} \frac{\partial u^h}{\partial u^l} \frac{\partial u^{k'}}{\partial u^m}.$$

والآن لدينا

$$\begin{aligned}X_{;j}^{i'} &= \frac{\partial}{\partial u^{j'}} X^{i'} + \Gamma_{jk}^{i'} X^{k'} \\ &= \frac{\partial}{\partial u^{j'}} \left( \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^m} X^m \right) + \Gamma_{jk}^{i'} \left( \frac{\partial u^{k'}}{\partial u^m} X^m \right) = X_{,n}^m \frac{\partial u^n}{\partial u^{j'}} \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^m} + X^m \frac{\partial^2 u^{i'}}{\partial u^m \partial u^l} \frac{\partial u^l}{\partial u^{j'}} + X^m \frac{\partial u^{k'}}{\partial u^m} \Gamma_{jk}^{i'}.\end{aligned}$$

من المعادلة (٦, ١٥)

$$X^{i'}_{;j} = X^m_{,n} \frac{\partial u^n}{\partial u^{j'}} \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^m} + X^m \left[ \Gamma^h_{lm} \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^h} \frac{\partial u^l}{\partial u^{j'}} - \Gamma^i_{hk} \frac{\partial u^{h'}}{\partial u^l} \frac{\partial u^{k'}}{\partial u^m} \frac{\partial u^l}{\partial u^{j'}} + \Gamma^{i'}_{jk} \frac{\partial u^{k'}}{\partial u^m} \right]$$

$$= \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^m} \frac{\partial u^n}{\partial u^{j'}} X^m_{,n} + \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^h} \frac{\partial u^l}{\partial u^{j'}} \Gamma^h_{lm} X^m.$$

عند تغيير المتغيرات الشكلية في الحد الثاني  $(m \rightarrow k, h \rightarrow m, l \rightarrow n)$ ، نحصل على

$$X^{i'}_{;j} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^m} \frac{\partial u^n}{\partial u^{j'}} \left[ X^m_{,n} + \Gamma^m_{nk} X^k \right] = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^m} \frac{\partial u^n}{\partial u^{j'}} X^m_{;n},$$

وهذا هو المطلوب.

**ملاحظة:** يتبين لنا من البرهانين الاثنين، أن الأول يتميز بكونه أقصر ويشق الصيغة، في حين يثبت الثاني صيغة محددة.

### (٦, ٣) الجيوديسي

ليكن  $C$  منحنى ذا المرتبة  $C^2$  على السطح  $S$  ذي البعد  $m$  للمرتبة  $C^2$  في  $\mathbb{R}^n$  ويكون متجة التقوس  $\kappa$  عند النقطة  $p \in C$ . نعرّف تقوس الجيوديسي  $\kappa_g$  بأنه إسقاط  $\kappa$  في الفضاء المماس  $TPS$ . وبالمثل،  $\kappa_g$  هو المشتقة المتغيرة لمتجة الوحدة المماسي. ولأن التقوس  $\kappa$  خارجي، فإن تقوس الجيوديسي  $\kappa_g$  داخلي.

إنّ الجيوديسي هو منحنى يكون فيه  $\kappa_g = 0$  عند جميع النقاط. وكمثال على ذلك نجد تقوسات الجيوديسي في كرة هي أقواس دوائر كبيرة، إلا أنّ دوائر خط العرض الأخرى ليست جيوديسية. (كما هو موضح في الشكل ٦, ٢) فتتحول المسارات القصيرة إلى جيوديسي، إلا أنّ هناك بعض الجيوديسي أطول بين أزواج النقاط. فمثلاً: تتصل النقاط غير المتقابلة قطرياً على خط الاستواء بجيوديسي قصير وطويل، حيث يعتمد ذلك على الطريق الذي يتم اتباعه. تتصل الأقطاب من خلال العديد من خطوط الطول نصف الدائرية لخط الطول، وجميعها بذات الطول.

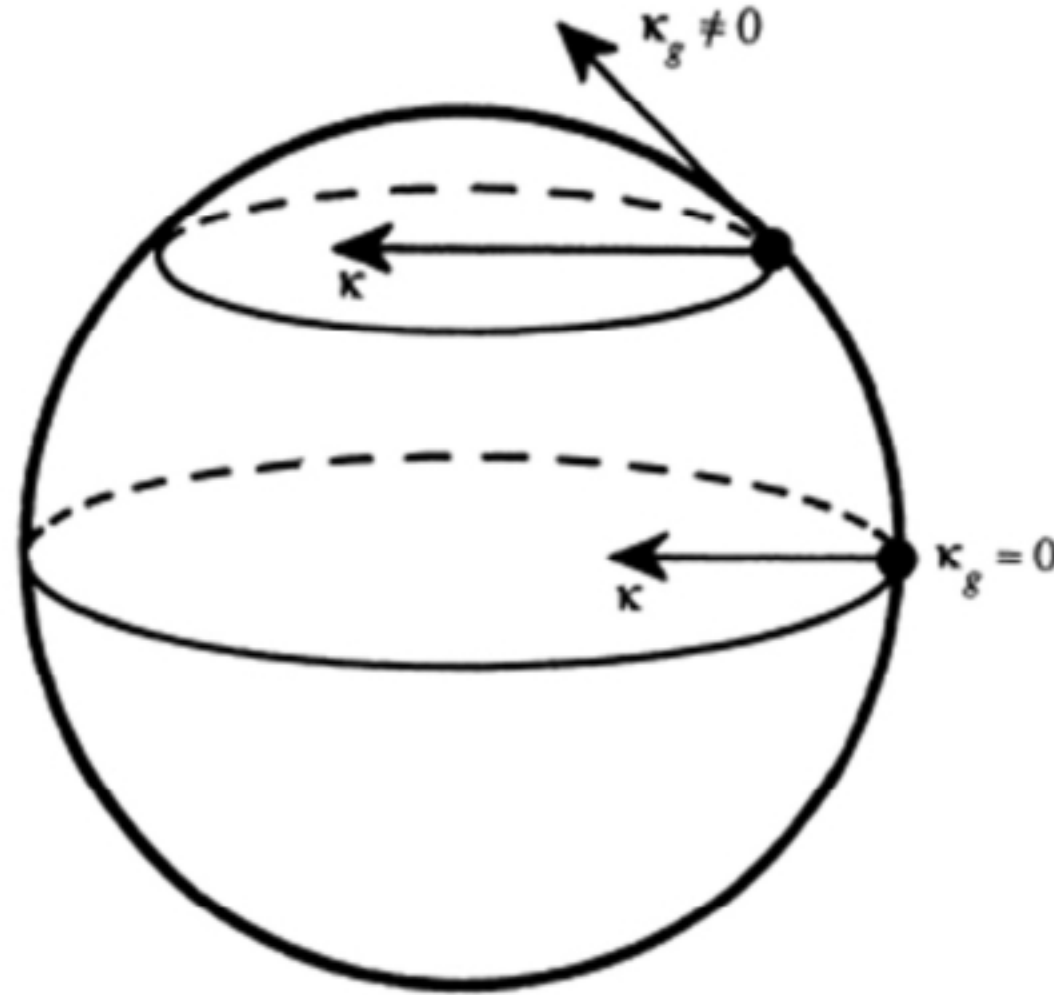
تفسّر النظرية التالية سبب كون الممرات الناعمة الأقصر هي جيوديسي.

## (٦, ٤) النظرية

إنَّ المنحنى الناعم هو جيوديسي إذا وفقط إذا انعدم التباين الأول لطوله.

**البرهان:** ليكن  $x(t)$  متوسطاً محلياً من طول القوس. إنَّ التطابق مع التغير المدعوم بالتراص  $\delta x$  في  $x(t)$  هو تباين بالطول.

$$\begin{aligned}\delta L &= \delta \int (\dot{x} \cdot \dot{x})^{1/2} \\ &= \int \frac{1}{2} (\dot{x} \cdot \dot{x})^{-1/2} 2\dot{x} \cdot \delta \dot{x} \\ &= \int T \cdot \delta \dot{x} \\ &= - \int \dot{T} \cdot \delta x \\ &= - \int \kappa \cdot \delta x \\ &= - \int \kappa_g \cdot \delta x\end{aligned}$$



الشكل (٦, ٢). على الكرة، إنَّ الدوائر الكبيرة هي جيوديسي ( $\kappa_g = 0$ )، إلا أن الدوائر الأخرى لخط الطول ليست جيوديسي ( $\kappa_g \neq 0$ ).

بالتكامل بالتجزئ وحقيقة أن  $\delta x$  تظل في السطح. ينعدم  $\delta L$  عند كل  $\delta x$  على طول السطح إذا وفقط إذا كان  $\kappa_g = 0$  ويصبح المنحنى جيوديسياً.

ملاحظة: بناءً على نظرية المعادلات التفاضلية، حيث إنَّ أي سطح ذي البعد  $m$  للمرتبة  $C^3$ ، عبر أي نقطة وفي أي اتجاه هناك جيوديسي  $C^2$  وحيد ومميز محلياً. وهي للحقيقة من عمل Philip Hartman ([Hart6]، (i)، الصفحة ٢٨٣) أو [Har2، المثال ٢، ٦، الصفحة ١٠٦]. يوفر الجيوديسي أقصر مسار إلى النقاط القريبة. يبين نقاش آخر، أنه إذا كان  $S$  متصلاً ومتراصاً (أو متصلاً وتاماً فقط)، فإنه بين أي نقطتين يوفر بعض الجيوديسي المسار الأقصر (نظرية Hopf-Rinow، كما هو موضح في Cheeger و Ebin [Che1، الفصل الثالث] أو Helgason [Hel، النظرية ٤، ١٠].

### (٦، ٥) صيغة الجيوديسي

في الإحداثيات المحلية  $u^1, \dots, u^m$ ، وعند النظر في منحنى  $u(t)$  المعلم بطول القوس، بحيث يكون متجه الوحدة المماسي  $T = \dot{u}$ . نُحدد مشتقة أي دالة  $f(u)$  على طول المنحنى من قاعدة السلسلة).

$$\sum_j f_{,j} \dot{u}^j$$

تُحقق المشتقة المتغيرة لأي حقل متجهات  $X^i$  على طول المنحنى ما يلي

$$(٦، ١٦) \quad \sum_j X^i_{,j} \dot{u}^j = \sum_j X^i_{,j} \dot{u}^j + \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk} \dot{u}^j X^k = \dot{X}^i + \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk} \dot{u}^j X^k$$

[كما هو موضح في ٦، ١]. فإنه بالنسبة للجيوديسي (المعلم بطول القوس)، لا بد أن تنعدم

المشتقة المتغيرة على طول المنحنى لحقل المتجهات  $X^i = T^i = \dot{u}^i$ :

$$(٦، ١٧) \quad 0 = \ddot{u}^i + \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k.$$

### (٦، ٦) الهندسة الزائدية

كمثال في هندسة ريمان، نعتبر أنه يتحدد فضاء زائدي ثنائي الأبعاد  $H$  لإحداثيات عمومية من خلال نصف المستوي العلوي

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$

مع المقياس

$$g_{ij} = y^{-2} \delta_{ij};$$

أي

$$ds^2 = \frac{1}{y^2} dx^2 + \frac{1}{y^2} dy^2.$$

باعتبار أن النقطي  $g$  هو مضاعف المقياس القياسي (إنَّ  $g$  هو "متواز")، فإنَّ الزوايا هي ذاتها في نصف المستوي العلوي كما هو الحال في  $H$ ، بالطبع وعلى الرغم من اختلاف المسافات.

الآن، سوف نحسب رموز كريستوفل والتقوس.

$$g^{ij} = y^2 \delta^{ij}.$$

من الصيغة (٢، ٦)،

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2} y^2 (g_{12,1} + g_{11,2} - g_{22,1}) = \frac{1}{2} y^2 \frac{\partial}{\partial y} y^{-2} = -y^{-1}.$$

وبالمثل

$$-\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = -y^{-1}$$

والباقي هو 0.

من الصيغة (٤، ٦)

$$\begin{aligned} R_{212}^1 &= -\Gamma_{21,2}^1 + \Gamma_{22,1}^1 + \sum_h \left( -\Gamma_{21}^h \Gamma_{h2}^1 + \Gamma_{22}^h \Gamma_{h1}^1 \right) \\ &= -y^{-2} + 0 + \left( -y^{-2} + y^{-2} \right) = -y^{-2}. \end{aligned}$$

وبالمثل

$$\begin{aligned} R_{121}^2 &= -y^{-2}, \quad R_{111}^1 = R_{222}^2 = 0, \\ R_{11} &= R_{111}^1 + R_{121}^2 = -y^{-2}, \quad R_{22} = -y^{-2} \\ R &= -2, \quad G = -1. \end{aligned}$$

وبالتالي، فإنَّ للفضاء الزائدي  $H$  تقوس جاوس الثابت -1 ويفترض مكانه مع المستوي

( $G = 0$ ) والكرة ( $G = 1$ ). لا بد أن يحقق الجيوديسي المعلم بطول القوس  $t$  المعادلة (١٧، ٦):

$$\ddot{y} + y^{-1} \dot{x}^2 - y^{-1} \dot{y}^2 = 0 \quad \text{و} \quad \ddot{x} - 2y^{-1} \dot{x} \dot{y} = 0.$$

ليكن  $p = dx / dy$ ، عندها يكون

$$\dot{x} = py, \quad \ddot{x} = \frac{dp}{dy} y^2 + p\ddot{y}.$$

بالتعويض عن  $\ddot{y}$  من المعادلة الثانية في الأول يعطي

$$\frac{dp}{dy} = y^{-1}(p^3 + p)$$

ويعطي التكامل باستخدام الكسور الجزئية

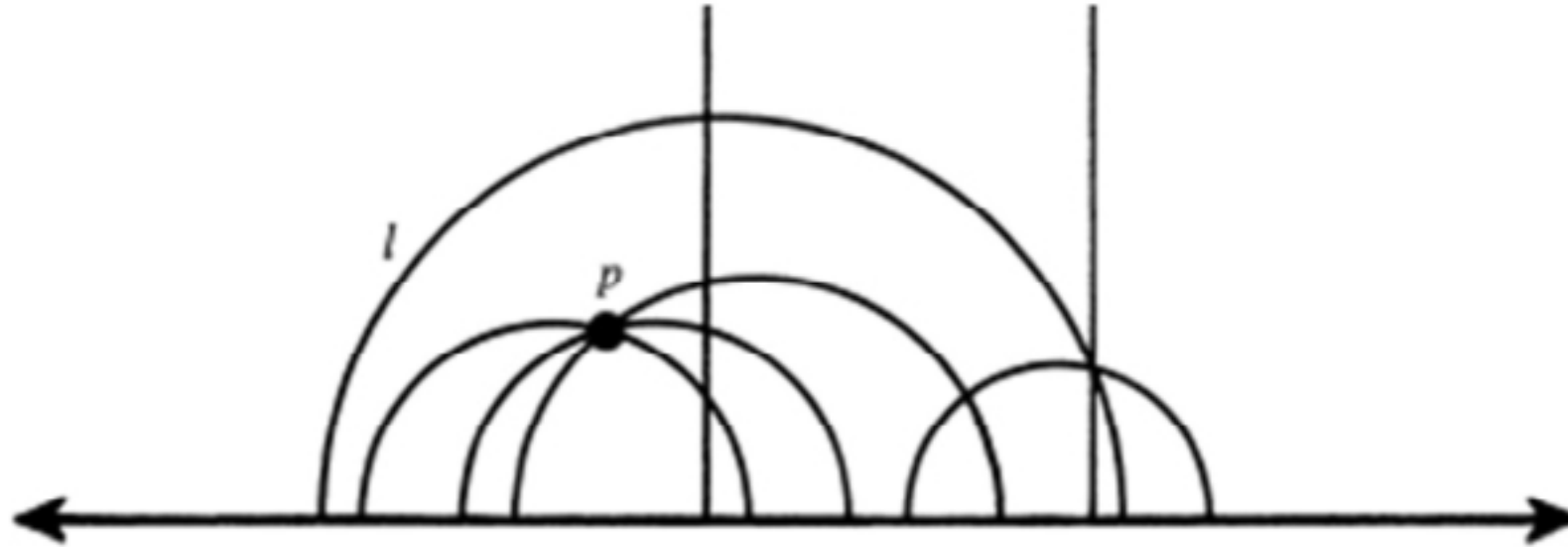
$$\frac{dx}{dy} = p = \pm \frac{cy}{\sqrt{1-c^2y^2}}.$$

إذا كان  $c = 0$ ، فإن الخطوط العمودية تكون جيوديسي. إلا إذا كان  $c = 1/a$  وبإجراء التكامل نحصل على

$$(x-b)^2 + y^2 = a^2$$

إن هذه الجيوديسي هي أنصاف دوائر متمركزة في المحور  $x$ . كما هو موضح في الشكل (٦, ٣).

عبر أي نقطتين، هناك جيوديسي وحيد، أو "خط مستقيم"، بحيث يكون أقصر مسار بين النقطتين. في الواقع، إن أول أربع فرضيات لإقليدس محققة في الهندسة الزائدية. إلا أن النظرية الخامسة المعروفة غير محققة في الهندسة الزائدية. تفيد عبارتها المتكافئة التي تعود إلى Playfair، أنه بالنسبة لخط  $l$  المحدد والنقطة  $p$  غير الموجودة على الخط فإن هناك خطاً وحيداً يعبر  $p$  ولا يتقاطع مع  $l$ . فتفشل الوحداية في الهندسة الزائدية، كما هو موضح في الشكل (٦, ٣). وبالتالي تثبت الهندسة الزائدية استحالة ما كان علماء الهندسة يحاولونه منذ آلاف السنين - لاستنتاج النظرية الخامسة من النظريات الأربع الأولى - وتقدم مثلاً تمهيدياً للهندسة غير الإقليدية.



الشكل (٦, ٣). إن الجيوديسي في فضاء زائدي  $H$  هي أنصاف دوائر متمركزة على محور  $x$  والخطوط العمودية.

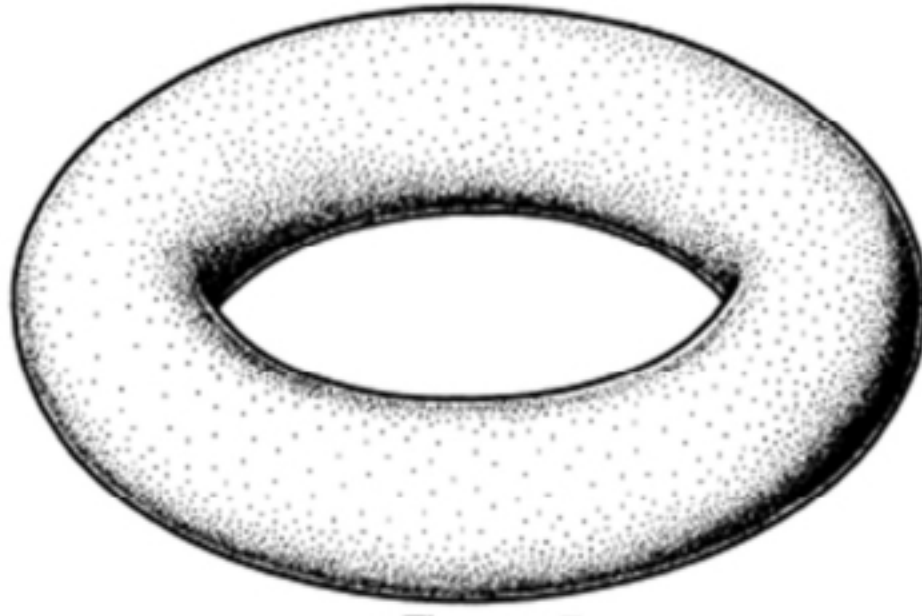
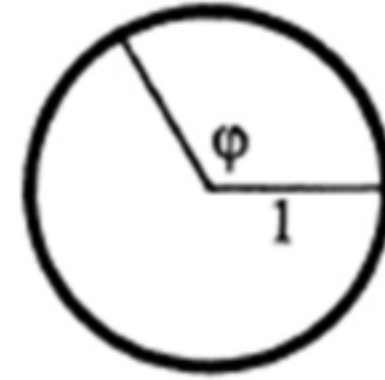
من المهم ملاحظة أن المسافة الزائدية من أي نقطة  $(a, b)$  إلى المحور  $x$  تُقاس على طول الجيوديسي العمودي، وهي

$$\int_{y=0}^b y^{-1} dy = \infty.$$

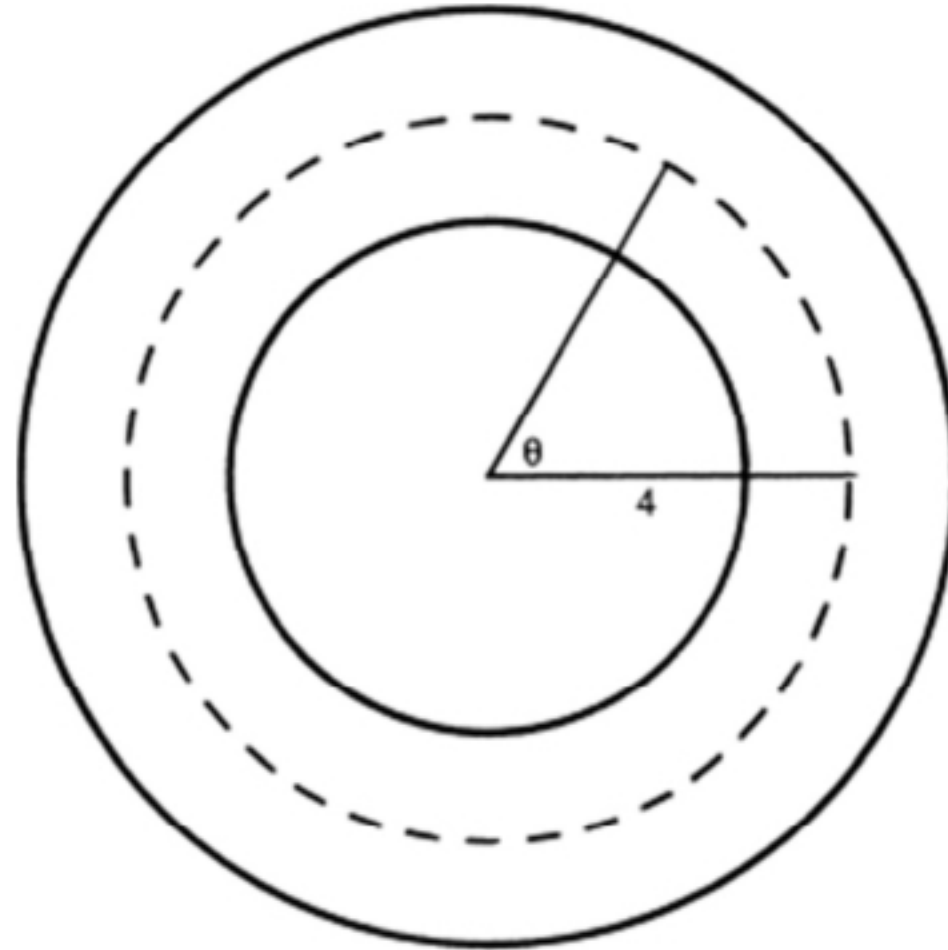
قطعاً لا يوجد في الفضاء الزائدي حدود، إلا أنه يمتد بشكل غير محدود في جميع الاتجاهات.

### (٦, ٧) الجيوديسي والتقوس المقطعي

نلاحظ أن التقوس المقطعي الموجب يعني أن الجيوديسي الموازي يتقارب، كما على كرة. في حين أن التقوس المقطعي السالب يعني أن الجيوديسي الموازي يتباعد، كما في الفضاء الزائدي.

الطارة  $T$ 

مقطع عرضي



عرض من الأعلى

الشكل (٦, ٤). الطارة  $T$ ، مع الإحداثيين  $\theta, \ell$ .



## تمارين

(١, ٦) طارة. ليكن  $T$  الطارة التي نحصل عليها بتدوير الدائرة المعلّمة بـ  $0 \leq \varphi < 2\pi$  حول محور 4 وحدات من المركز. استخدم زاوية التدوير  $0 \leq \theta < 2\pi$  و  $\varphi$  كإحداثيات. (كما هو موضح في الشكل ٦, ٤).

(أ) بيّن أن

$$g_{11} = (4 + \cos \varphi)^2, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = 1,$$

$$\Gamma_{12}^1 = -\frac{\sin \varphi}{4 + \cos \varphi}, \quad \Gamma_{11}^2 = \sin \varphi (4 + \cos \varphi),$$

الباقي هو 0.

(ب) في حقل المتجهات

$$a = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta},$$

أي  $a^1 = \cos \varphi$  و  $a^2 = 0$ . بيّن أنه تتحدد المشتقة المتغيرة من العلاقة

$$a_{;2}^1 = -\sin \varphi \frac{4 + 2 \cos \varphi}{4 + \cos \varphi}, \quad a_{;1}^2 = \sin \varphi \cos \varphi (4 + \cos \varphi),$$

والباقي هو 0.

(ج) بيّن أنه يتعين طول المنحنى الحلزوني  $\theta(t) = \varphi(t) = t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) بالتكامل

$$\int_0^{2\pi} \left[ (4 + \cos t)^2 + 1 \right]^{1/2} dt.$$

(د) من المؤكد أنّ  $R_{111}^1 = R_{222}^2 = 0$ . بيّن أنّ

$$R_{212}^1 = \frac{\cos \varphi}{4 + \cos \varphi}, \quad R_{121}^2 = \cos \varphi (4 + \cos \varphi),$$

$$R_{11} = \cos \varphi (4 + \cos \varphi), \quad R_{12} \equiv R_{21} = 0,$$

$$R_{22} = \frac{\cos \varphi}{4 + \cos \varphi}, \quad R = \frac{2 \cos \varphi}{4 + \cos \varphi}, \quad G = \frac{\cos \varphi}{4 + \cos \varphi}.$$

(هـ) بيّن أنه لا يوجد تطبيق يحافظ على المسافة لأي منطقة في الطارة الموجودة على المناطق في المستوي أو على الكرة.

(٦, ٢) الطارة المسطحة ذات البعد الأعلى. في الطارة ذات البعد  $n$  حيث  $T^n \subset \mathbb{R}^{2n}$  التي تنتج كجاء ديكارتي لـ  $n$  من الدوائر  $S^1$ :

$$T^n = S^1 \times \dots \times S^1 = \{(x_1, \dots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} : x_1^2 + x_2^2 = \dots = x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2 = 1\}.$$

أثبت باستخدام الموتر الأساسي الثاني ورموز كريستوفل أن التقوس المقطعي  $T_n$  هو 0؛ أي  $K(P) = 0$  عند كل نقطة بالنسبة لكل مستوي ثنائي  $P$ . (يُسمى هذا السطح بالمسطح).

(٦, ٣) الكرة. نتحقق في هذا التمرين من أن الجيوديسي هي أقواس لدوائر كبيرة وأن تقوس جاوس للكرة ثابت. ففي كرة  $S$  نصف قطرها  $a$  مع الإحداثيات الكروية المعتادة يكون  $u^1 = \theta$  و  $u^2 = \varphi$ .

(أ) تحقق من أنه يتوصل إلى الدائرة الكبيرة من المعادلة

$$\cot \varphi = c_1 \cos \theta + c_2 \sin \theta,$$

باستثناء الدوائر الكبيرة العمودية  $\theta = c$ .

ملاحظة: إن الدائرة الكبيرة غير العمودية هي تقاطع الكرة مع المستوي

$$z = c_1 x + c_2 y.$$

(ب) بين أن المقياس يتعين عند

$$g_{11} = a^2 \sin^2 \varphi, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = a^2$$

(ج) احسب رموز كريستوفل

$$\Gamma_{12}^1 = \cot \varphi, \quad \Gamma_{11}^2 = -\sin \varphi \cos \varphi,$$

حيث ينعدم الباقي. استنتج أن الجيوديسي تحقق

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + 2 \cot \varphi \dot{\theta} \dot{\varphi} = 0 \\ \ddot{\varphi} - \sin \varphi \cos \varphi \dot{\theta}^2 = 0 \end{cases}$$

وبالتالي  $0 = \ddot{\varphi} - \sin \varphi \cos \varphi \dot{\theta}^2 - 2 \cot \varphi \dot{\theta} \dot{\varphi}$ ، حيث تشير الأوليات إلى المشتقات فيما يتعلق بـ  $\theta$ ، ما

لم يكن  $\theta = c$ . وبالتالي، تحقق من أن  $w = \cot \varphi$ ، المعادلة  $w' + w = 0$ ، لذا يكون

$$w = c_1 \cos \theta + c_2 \sin \theta.$$

لذلك، فإن الجيوديسي هي بالقطع أقواس لدوائر كبيرة.

(د) احسب تقوس ريمان

$$R_{212}^1 = -R_{221}^1 = 1, \quad R_{121}^2 = -R_{112}^2 = \sin^2 \varphi.$$

الباقى هو 0؛ تقوس ريتشي

$$R_{11} = \sin^2 \varphi, \quad R_{12} = R_{21} = 0, \quad R_{22} = 1;$$

التقوس القياسي  $R = 2a^{-2}$  وأخيراً تقوس جاوس  $G = a^{-2}$ .

ملاحظة: يبين النقاش التناظري المبدئي أن الجيوديسي هي أقواس لدوائر كبيرة. قد نفترض أن الجيوديسي هو مماس لخط الاستواء عند نقطة معينة. من خلال مبدأ الوجدانية، لا بد أن يكافئ انعكاسه عبر خط الاستواء. وبالتالي، لا بد أن يكون قوساً لخط الاستواء.

(٤, ٦) فوق الكرة. عند النظر إلى فوق كرة مدور ثلاثية الأبعاد  $S$  نصف قطره  $a$  حول 0 في  $\mathbb{R}^4$ ,

$$\{x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = a^2\}$$

وبتعليم

$$\mathbf{x}(u_1, u_2, u_3) = a(\sin u_1 \cos u_2, \sin u_1 \sin u_2, \cos u_1 \cos u_3, \cos u_1 \sin u_3)$$

$$\left(0 \leq u_1 \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq u_2 \leq 2\pi, 0 \leq u_3 \leq 2\pi\right).$$

(أ) بين أن المقياس هو

$$ds^2 = a^2 du_1^2 + a^2 \sin^2 u_1 du_2^2 + a^2 \cos^2 u_1 du_3^2.$$

(ب) احسب رموز كريستوفل  $\Gamma_{jk}^i$ . (لاحظ أنه من جميع  $g_{ij,k}$ ، فقط لدينا  $g_{22,1}$  و

$g_{33,1}$  ليستا صفريتين).

(ج) احسب بعض مركبات تقوس ريتشي:

$$R_{11} = 2,$$

$$R_{22} = 1 - \cos 2u_1 = 2 \sin^2 u_1,$$

$$R_{33} = 1 + \cos 2u_1 = 2 \cos^2 u_1$$

(د) جد  $v$ ، مضاعف  $\frac{\partial}{\partial u_1}$  لطول الوحدة. استخدم  $e$  لحساب  $\text{Ric}(v, v) = R_{jl} v^j v^l$ . وفسّر ذلك فيزيائياً.

(هـ) استخدم  $e$  لحساب التقوس القياسي  $R$ . وفسّر ذلك فيزيائياً.

(و) اكتب معادلات جيوديسي وتحقق من أن  $u_1 = \frac{\pi}{4}, u_2 = u_3 = t$  تطابقها. تحقق مرة ثانية من خلال حساب متجة التقوس  $\kappa$  لهذا المنحنى في  $\mathbb{R}^4$  وبين أنه متعامد دائماً على الكرة  $S$  (بحيث يكون تقوس جيوديسي يساوي 0). هل هذا منحنى لدائرة كبيرة؟

(٦, ٥) إنَّ النموذج العمومي البديل لفضاء زائدي هو قرص "Poincare" في  $\mathbb{R}^2$  مع المقياس  $ds^2 = 2ds_0^2 / (1 - r^2)$ ، حيث إنَّ  $ds_0^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$ ، وبذلك

$$ds^2 = \frac{4}{(1-r^2)^2} dr^2 + \frac{4r^2}{(1-r^2)^2} d\theta^2.$$

باستخدام الإحداثيين  $r, \theta$ ، احسب رموز كريستوفل، وموتر تقوس ريمان، والتقوس القياسي  $R$ ، وتحقق من أن تقوس جاوس هو  $R/2 = -1$ . تحقق مرة أخرى من النتيجة باستخدام هذه الصيغة الخاصة للإحداثيات المتعامدة (Stoker [Sto]، الباب الثالث عشر، الصفحة ١٨٠).

$$G = -\frac{1}{2\sqrt{\det g_{ij}}} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{g_{11,2}}{\sqrt{\det g_{ij}}} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{g_{22,1}}{\sqrt{\det g_{ij}}} \right].$$

(٦, ٦) إنَّ النموذج العمومي الآخر للفضاء الزائدي هو  $\mathbb{R}^2$  ذو الإحداثيات القطبية والمقياس

$$ds^2 = dr^2 + \sinh^2 r d\theta^2.$$

كما في التمرين (٦, ٥)، بين أن  $G = -1$  وتحقق من ذلك باستخدام صيغة ستوكر. (حيث إنها إحداثيات الفضاء المماس الطبيعي المرتبطة بالتطبيق الأسّي للفقرة ١, ٩).



### النسبية العامة

في أواخر القرن التاسع عشر، لوحظ لا اتساقية غريبة في مدار عطارد. لقد فسّر نيوتن براءة الكواكب الإهليلجية لكيبلر من خلال الجاذبية الشمسية وحساب التفاضل والتكامل. واستخدم خلفاؤه طريقة الاضطرابات لحساب الانحرافات التي تسببها الكواكب الأخرى. وتوقعت حساباتهم أنه يجب أن يدور شكل المدار الإهليلجي أو يلف، جزءاً من الدرجة كل قرن:

الكوكب	الدوران المتوقع (كل قرن)
زحل	46'
المشتري	432"
عطارد	532"

إنَّ 60' ( 60 دقيقة) يكافئ درجة قوس واحدة، و 60" ( 60 ثانية) تكافئ دقيقة واحدة للقوس. تؤكد المراقبة التوقعات المتعلقة بزحل والمشتري، إلا أنها تبين أن عطارد دار 575" كل قرن. وبحلول ١٩٠٠م، لوحظ تجاوز التباين من الدوران المتوقع، أي خطأ تجريبي ممكن تصوره. ما الذي كان يسبب 43" كل قرن؟

تقدم النسبية العامة الإجابة.



الشكل (١, ٧). "دوران عطارديبطء."

## (١, ٧) النسبية العامة

تحتوي نظرية النسبية العامة على ثلاثة عناصر. أولاً: تصف النسبية الخاصة الحركة في الفضاء الحر دون جاذبية. ثانياً: يُعمم مبدأ التكافؤ نظرية النسبية العامة، من حيث المبدأ على الأقل، ليتضمن الجاذبية، تقريباً من خلال معادلة الجاذبية للتسارع. ثالثاً: توفر هندسة ريمان إطاراً عملياً رياضياً وهو ما يجعل الحسابات ممكنة.

لقد تعلمت أول مرة، اشتقاق مبادرة عطاردي من أعمال Spain (Spa، الفصل الثامن) و Weinberg (Wei، الفصل التاسع) بمساعدة صديقي Ira Wasserman. يستند الاشتقاق القصير المبين هنا إلى حديث طالب المؤلف Phat Vu في حلقة الرياضيات في كلية ويليامز، الذي يستند بدوره إلى كتاب G. B. Jeffery (Jef، الفصل السابع). يظهر حساب يسير يتضمن بعض الأحداث الدرامية من تاريخ الفلك في Morgan [Mor2].

## (٢, ٧) النسبية الخاصة

جسيم واحد في الفضاء الحر يتبع خطاً مستقيماً عند سرعة ثابتة. على سبيل المثال،

$$x = at, y = bt, z = ct, \text{ أو}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},$$

وهي صيغة الخط المستقيم من خلال نقطة الأصل في فضاء ثلاثي الأبعاد. وخط مستقيم أيضاً في فضاء رباعي الأبعاد (الزمكان):

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{t}{1},$$

أي جيوديسي للمقياس القياسي

(٧, ١)

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2$$

إنه بالفعل جيوديسي لأي مقياس يكون بهذا الشكل

(٧, ٢)

$$ds^2 = a_1 dx^2 + a_2 dy^2 + a_3 dz^2 + a_4 dt^2$$

أسند أينشتاين النسبية الخاصة إلى مسلمتين:

- i. تبدو قوانين الفيزياء مماثلة في جميع الأطر المرجعية الداخلية، أي إنها تبدو متحركة لجميع المراقبين بسرعة ثابتة نسبياً لبعضهم البعض. بالطبع، في صياغة تسريع الأطر المرجعية، تبدو قوانين الفيزياء مختلفة. فيسقط كوب عصير الليمون فجأة في سيارة مسرعة، وتنطلق كرة التنس كالصاروخ وتندح على الأرض تماماً من السرعة.
- ii. ترتبط سرعة شعاع الضوء أيضاً بالإطار الداخلي، سواء من خلال الحركة في الاتجاه ذاته أو في اتجاه معاكس. (لقد خمن أينشتاين هذه الحقيقة المفاجئة دون أن يعرف الدليل الذي قدمته تجربة Michelson-Morley الشهيرة. وهو يؤدي إلى فضول آخر، مثل تباطؤ الوقت بسرعات عالية.) تُستخدم فرضيات أينشتاين للحركة إلى جانب الجيوديسي في زمن الفضاء إذا أخذنا الحالة الخاصة للمعادلة (٧, ٢):

(٧, ٣)

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2$$

إنّ مقاس لورنتز المعروف، بحيث تكون  $c$  هي سرعة الضوء. نختار الوحدات لجعل  $c = 1$ .

يبقى مقاس لورنتز غير متغير في ظل القصور الذاتي في تغير الإحداثيات، إلا أنه من الممتع تسريع نظم الإحداثيات.



بالنسبة إلينا، إنَّ الميزة الجديدة لهذا المقياس هي وجود إشارة سالبة؛ حيث إنَّ المقياس ليس معرفاً بالإشارة الموجبة. باستثناء الحقيقة الجديدة وهي أنَّ مربع طول المنحنى في الزمكان يمكن أن يكون موجباً أو سالباً، وتبقى جميع التعريفات والخصائص كما هي (كما هو موضح في O'Neill [ONe]). على وجه الخصوص، سيؤدي التقوس المقطعي الموجب إلى أن تتقارب الجيوديسي المتوازية (سوف يقل مربع المسافة بينها). (كما هو موضح في الفقرة ٧، ٦).

في أغلب الأحيان، تُسمى هذه المسافة الجديدة "الوقت الفعلي"  $\tau$  باعتبار أن للجزء الساكن  $(x, y, z)$  ثابت  $ds^2 = dt^2$ . إذا استبدلنا الرمز  $\tau$  بالرمز  $s$  واستخدمنا الإحداثيات الكروية، يصبح مقياس لورنتز:

$$d\tau^2 = -dr^2 - r^2 d\varphi^2 - r^2 \sin^2 \varphi d\theta^2 + dt^2 \quad (٧, ٤)$$

### (٧, ٣) مبدأ التكافؤ

تتناول النسبية الخاصة موقع الحركة، والسرعة، والتسارع - في الفضاء الحر. ويبقى السؤال: كيف يمكن التعامل مع الجاذبية؟ يؤكد مبدأ التكافؤ أنَّ التأثيرات الفيزيائية للجاذبية لا تتميز عن التأثيرات الفيزيائية للتسارع. إذا شعرت بالضغط على أرضية مصعد صغير، لا يمكنك معرفة ما إذا كان ذلك نتيجة استناد المصعد إلى كوكب ضخم أم بسبب تسارع الكوكب إلى الأعلى. ونتيجةً لذلك، فإنَّ تأثير الجاذبية هو مثل التسارع: إنه يشكّل صياغة  $ds^2$ . سيُختزل حساب الحركة في مجال الجاذبية إلى حساب الجيوديسي في مقياس غريب.

### (٧, ٤) مقياس شفارتزشيلد (Schwarzschild)

إنَّ المثال الأساسي في النسبية العامة هو التأثير على مقياس لورنتز لكتلة نقطة واحدة، مثل الشمس في مركز النظام الشمسي. سنفترض أنَّ المقياس يأخذ الشكل البسيط

$$d\tau^2 = -e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 (d\varphi^2 + \sin^2 \varphi d\theta^2) + e^{\nu(r)} dt^2, \quad (٧, ٥)$$

حيث  $\lambda(r)$  و  $\nu(r)$  هي دالتان مُحدَّدان. إنَّ هذا المقياس متماثل كروياً ومستقل عن الزمن. (يُختار الإحداثي  $r$  بحيث يكون التشوه النسبي نصف قطري، بدلاً من الاتجاهات المماسية). لأسباب فيزيائية، افترض أينشتاين أيضاً أنَّ ما يسمى بموتر أينشتاين ينعدم:

$$(٧, ٦) \quad G_k^i = g^{ij} R_{jk} - \frac{1}{2} R \delta_k^i = 0.$$

(في الواقع، يؤدي انعدام موتر أينشتاين  $G_k^i$  إلى انعدام تقوس ريتشي  $R_{jk}$ ، لذا يكون الافتراض المكافئ والأبسط هو  $R_{jk} = 0$ ). للاستفادة من هذا الافتراض، نحسب الآن موتر أينشتاين لمقياس (٧, ٥). نرتب المتغيرات  $r, \varphi, \theta, t$ . ونحسب أولاً المقياس

$$g_{11} = -e^\lambda, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \varphi, \quad g_{44} = e^\nu,$$

وتنعدم الأخرى

$$g^{11} = -e^{-\lambda}, \quad g^{22} = -r^{-2}, \quad g^{33} = -r^{-2} \sin^{-2} \varphi, \quad g^{44} = e^{-\nu},$$

عندها تكون رموز كريستوفل

$$(٧, ٧) \quad \begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \lambda', & \Gamma_{22}^1 &= -re^{-\lambda}, & \Gamma_{33}^1 &= -re^{-\lambda} \sin^2 \varphi, \\ \Gamma_{44}^1 &= \frac{1}{2} \nu' e^{\nu-\lambda}, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = r^{-1}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \varphi \cos \varphi, \\ \Gamma_{23}^3 &= \cot \varphi, & \Gamma_{14}^4 &= \frac{1}{2} \nu', \end{aligned}$$

وتنعدم البقية.

حيث يشير  $\lambda'$  إلى  $d\lambda/dr$ ؛ إلى بعض مركبات موتر تقوس ريمان على النحو التالي:

$$\begin{aligned} R_{121}^2 &= R_{131}^3 = \frac{1}{2} r^{-1} \lambda', & R_{141}^4 &= -\frac{1}{2} \nu'' + \left( \frac{1}{2} \nu' \right) \left( \frac{1}{2} \lambda' \right) - \frac{1}{4} \nu'^2, \\ R_{212}^1 &= \frac{1}{2} r \lambda' e^{-\lambda}, & R_{232}^3 &= 1 - e^{-\lambda}, & R_{242}^4 &= \frac{1}{2} \nu' (-re^{-\lambda}), \\ R_{313}^1 &= \frac{1}{2} r \lambda' \sin^2 \varphi e^{-\lambda}, & R_{323}^2 &= \sin^2 \varphi (1 - e^{-\lambda}), \\ R_{343}^4 &= \frac{1}{2} \nu' (-r) e^{-\lambda} \sin^2 \varphi, \\ R_{414}^1 &= \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} (\nu'' + \frac{1}{2} \nu'^2 - \frac{1}{2} \nu' \lambda'), \\ R_{424}^2 &= R_{434}^3 = \frac{1}{2} r^{-1} \nu' e^{\nu-\lambda}; \end{aligned}$$

وتكون بعض مركبات تقوس ريتشي بهذه الصورة

$$\begin{aligned}
R_{11} &= r^{-1} \lambda' - \frac{1}{2} v'' + \frac{1}{4} v' \lambda' - \frac{1}{4} v'^2, \\
R_{22} &= 1 + \frac{1}{2} r e^{-\lambda} (\lambda' - v') - e^{-\lambda}, \\
R_{33} &= \sin^2 \varphi R_{22}, \\
R_{44} &= \frac{1}{2} e^{\nu - \lambda} \left( v'' + \frac{1}{2} v'^2 - \frac{1}{2} v' \lambda' + 2r^{-1} v' \right), \\
R &= -2r^{-2} + e^{-\lambda} \left( v'' - 2r^{-1} \lambda' - \frac{1}{2} v' \lambda' + \frac{1}{2} v'^2 + 2r^{-1} v' + 2r^{-2} \right);
\end{aligned}$$

وأخيراً تكون بعض مركبات موتر أينشتاين هكذا

$$\begin{aligned}
G_k^i &= g^{ij} R_{jk} - \frac{1}{2} R \delta_k^i, \\
G_1^1 &= r^{-2} + e^{-\lambda} (-r^{-1} v' - r^{-2}), \\
G_2^2 &= G_3^3 = e^{-\lambda} \left( -\frac{1}{2} v'' + \frac{1}{2} r^{-1} \lambda' - \frac{1}{2} r^{-1} v' + \frac{1}{4} v' \lambda' - \frac{1}{4} v'^2 \right), \\
G_4^4 &= r^{-2} + e^{-\lambda} (r^{-1} \lambda' - r^{-2}).
\end{aligned}$$

باعتبار أن  $e^{-\lambda} = 1 - \gamma r^{-1}$ ،  $G_4^4 = 0$  بالنسبة لـ  $\gamma$  ثابت (تحقق من أن  $d\gamma/dr = 0$ ).  
 ففي جسيم اختبار مع سرعة 0 و  $r$  كبير (كما هو موضح في التمرين ٥، ٧)، نستنتج أن  
 $\gamma = 2GM$ ، حيث  $M$  هي الكتلة المركزية و  $G$  هو ثابت الجاذبية. وبالتالي،

$$e^{-\lambda} = 1 - 2GMr^{-1}$$

باعتبار أن  $G_1^1 = G_4^4 = 0$  و  $\lambda + \nu$  ثابت. وباعتبار أنه ينبغي أن يكون المقياس مثل مقياس  
 لورنتز لأن  $r$  ضخم، نستنتج أن  $\lambda + \nu = 0$ . وبالتالي يكون:

(٧، ٨)

$$e^{\nu} = e^{-\lambda} = 1 - 2GMr^{-1}.$$

ويكون  $G_2^2 = G_3^3 = 0$  تلقائياً.

لقد توصلنا إلى مقياس سفارتزشيلد المعروف:

$$(٧, ٩) \quad dr^2 = -(1-2GMr^{-1})^{-1}dr^2 - r^2(d\varphi^2 + \sin^2\varphi d\theta^2) + (1-2GMr^{-1})dt^2$$

لاحظ أنه إذا كانت  $M = 0$ ، يُختزل مقياس سفارتزشيلد (٧, ٩) إلى مقياس لورنتز (٧, ٤). لاحظ أيضاً الوحدات في هذه الإحداثيات حيث يُختزل  $r$  إلى  $2GM$ ، الذي يُفسر على النحو التالي: لقد أحدث تقلص الشمس إلى نقطة ثقباً أسود في "نصف قطر سفارتزشيلد"  $r = 2GM$ !

#### (٧, ٥) الميكانيكا السماوية النسبية

نحن الآن على استعداد لملاحظة الاختلافات التي توقعها النسبية العامة لمدار عطارد. تتمثل الفيزياء في المعادلات الأربع للجيوديسي، المعادلة (٦, ١٧) في مقياس سفارتزشيلد (٩, ٧). ينبغي أن تتيح لنا المعادلات الأربع حل  $r$ ،  $\varphi$ ،  $\theta$  و  $t$  كدوال لـ  $\tau$ . وبدلاً من استخدام المعادلة الأولى للجيوديسي التي تتضمن  $d^2r/d\tau^2$ ، نستخدم المتطابقة  $d\tau^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ :

$$(٧, ١٠) \quad -(1-2GMr^{-1})^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 - r^2 \sin^2\varphi\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + (1-2GMr^{-1})\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 1.$$

لحساب المعادلات الجيوديسية الثلاث الأخرى، فإننا نستخدم المعادلة (٧, ٨) لحساب

$$\lambda' = -\nu' = -2GM(r^2 - 2GMr)^{-1},$$

$$\lambda'' = -\nu'' = 2GM(r^2 - 2GMr)^{-2}(2r - 2GM),$$

ثم نستخدم المعادلة (٧, ٧)

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= -GM (r^2 - 2GMr)^{-1} \\
\Gamma_{22}^1 &= -r(1 - 2GMr^{-1}) = 2GM - r \\
\Gamma_{33}^1 &= (2GM - r) \sin^2 \varphi \\
\Gamma_{44}^1 &= \frac{1}{2}(1 - 2GMr^{-1})(2GMr^{-2}) \\
\Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = r^{-1} \\
\Gamma_{33}^2 &= -\sin \varphi \cos \varphi \\
\Gamma_{33}^3 &= \cot \varphi \\
\Gamma_{14}^4 &= GM (r^2 - 2GMr)^{-1}.
\end{aligned}$$

وبالتالي، فإنَّ المعادلات الجيوديسية الثلاث الأخرى (كما هو موضح في المعادلة (١٧، ٦) هي

$$(٧, ١١) \quad \frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} + 2r^{-1} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} - \sin \varphi \cos \varphi \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 = 0,$$

$$(٧, ١٢) \quad \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + 2r^{-1} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} + 2 \cot \varphi \frac{d\varphi}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} = 0,$$

$$(٧, ١٣) \quad \frac{d^2 t}{d\tau^2} + \frac{2GM}{r^2 - 2GMr} \frac{dr}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} = 0.$$

يمكن التوصل إلى مدار عطارٍ من خلال المعادلات من (٧، ١٠) إلى (٧، ١٣). بافتراض

أن  $\frac{d\varphi}{d\tau}$  و  $\cos \varphi$  هما بـ 0، من المعادلة (٧، ١١)  $\varphi$  تبقى  $\pi/2$ . وبالتالي (نسبياً) يبقى المدار مستوياً. حيث تصبح المعادلات الثلاث الأخرى بهذا الشكل

$$(٧, ١٤) \quad -(r^2 - 2GMr^{-1})^{-1} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 - r^2 \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + (1 - 2GMr^{-1}) \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 1$$

$$(٧, ١٥) \quad \frac{d^2\theta}{d\tau^2} + 2r^{-1} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} = 0.$$

$$(٧, ١٦) \quad \frac{d^2t}{d\tau^2} + 2GM (r^2 - 2GMr)^{-1} \frac{dr}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} = 0.$$

ينتج عن تكامل المعادلة (٧, ١٥) والمعادلة (٧, ١٦)

$$(٧, ١٧) \quad r^2 \frac{d\theta}{d\tau} = h \quad (\text{ثابت})$$

$$(٧, ١٨) \quad (1 - 2GMr^{-1}) \frac{dt}{d\tau} = \beta \quad (\text{ثابت})$$

وبالتالي تصبح المعادلة (٧, ١٤)

$$(٧, ١٩) \quad -r^{-4} \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 - r^{-2} (1 - 2GMr^{-1}) + \beta^2 h^{-2} = h^{-2} (1 - 2GMr^{-1}).$$

وهو ما يجعل  $r = u^{-1}$  تعطي

$$\left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 = 2GM \left( u^3 - \frac{1}{2GM} u^2 + \beta_1 u + \beta_0 \right)$$

بالنسبة للثوابت  $\beta_0, \beta_1$ . لا بد أن تكون القيم العظمى والصغرى  $u_1, u_2$  لـ  $u$  جذوراً. باعتبار أن الجذور تُختزل إلى  $1/2GM$ ، فيكون الجذر الثالث  $1/2GM - u_1 - u_2$ ، وبالتالي فإن:

$$\begin{aligned} \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 &= 2GM (u - u_1)(u - u_2) \left( u - \frac{1}{2GM} + u_1 + u_2 \right), \\ \frac{d\theta}{|du|} &= \frac{1}{\sqrt{(u - u_1)(u - u_2)}} [1 - 2GM(u + u_1 + u_2)]^{-1/2} \\ &\approx \frac{1 + GM(u + u_1 + u_2)}{\sqrt{(u - u_1)(u - u_2)}}. \end{aligned}$$

كتقريب أولي، إنَّ المدار هو قطع ناقص تقليدي

$$u = l^{-1}(1 + e \cos \theta),$$

ويكون  $u_1 = l^{-1}(1 + e)$ ,  $u_2 = l^{-1}(1 - e)$ ، والمسافة المتوسطة

$$a = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} \right) = \frac{1}{1 - e^2}.$$

بالنسبة لدوران واحد

$$\begin{aligned}\Delta\theta &\approx \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{1+GMl^{-1}(3+e\cos\theta)}{\sqrt{l^{-1}e(1-\cos\theta)l^{-1}e(1+\cos\theta)}} l^{-1}e |\sin\theta| d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} 1+GMl^{-1}(3+e\cos\theta) d\theta \\ &= 2\pi + 6\pi GM / l \\ &= 2\pi + 6\pi GM / a(1-e^2).\end{aligned}$$

لقد دار القطع الناقص  $6\pi GM / a(1-e^2)$  راديان. فيكون معدل دوران عطارد في زمن قدره  $T$  هو

$$\frac{6\pi GM}{a(1-e^2)T},$$

أو بالعودة إلى الوحدات الأكثر قياسية (إن سرعة الضوء  $c$  ليست 1) يصبح مساوياً

$$\frac{6\pi GM}{e^2 a(1-e^2)T} \text{ راديان}$$

والآن

$G = 6.67 \times 10^{-11} m^3 / kg \text{ sec}^2,$	ثابت الجاذبية
$M = 1.99 \times 10^{30} kg,$	كتلة الشمس
$c = 3.00 \times 10^8 m / \text{sec},$	سرعة الضوء
$a = 5.768 \times 10^{10} m,$	المسافة الرئيسة بين عطارد والشمس
$e = 0.206,$	الانحراف في مدار عطارد
$T = 88,$	دورة عطارد (باليوم)
36525	العقد (باليوم)
$360 / 2\pi$	الراديان (بالدرجات)
3600".	الدرجات

بضرب هذه الأرقام معاً، نستنتج أن معدل الدوران هو حوالي  $43.1'' / \text{قرن}$ ، وهو ما يتوافق مع الملاحظة السابقة.

أ. أينشتاين

131

("متممات" موترات موافق التغير ومخالف التغير على التوالي)، و

$$B_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}$$

نسَمِّي  $B_{\mu\nu}$  الموتَر المُختَزَل المرتبط بـ  $A_{\mu\nu}$  . وعلى نحو مماثل،

$$B^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta}$$

قد يُلاحظ أنَّ  $g^{\mu\nu}$  ليس إلا متممًا لـ  $g_{\mu\nu}$  باعتبار

$$g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g_{\alpha\beta} = g^{\mu\alpha} \delta_{\alpha}^{\nu} = g^{\mu\nu}$$

§ ٩. معادلة خط الجيوديسي. حركة الجسم.

باعتبار أنَّ العنصر الخطي  $ds$  يُعرَّف بشكلٍ مستقل عن نظام الإحداثيات، يكون للخط المرسوم بين النقطتين  $P$  و  $P'$  للمتصل رباعي الأبعاد بحيث يكون  $\int ds$  مستقرًا -خط جيوديسي- معنى مستقل أيضاً عن خيار الإحداثيات. أنَّ معادلته هي

$$\delta \int_{P'}^P ds = 0 \quad (20)$$

عند تنفيذ التغير بالطريقة المعتادة، نتوصل بهذه المعادلة إلى أربع معادلات تفاضلية تحدد خط الجيوديسي؛ تُدرج هذه العملية هنا لغرض المتعم. ليكن  $\lambda$  دالة الإحداثيات  $x^\nu$  وليحدد ذلك يحدد عائلة السطوح التي تقطع خط الجيوديسي المطلوب وكذلك جميع الخطوط في تقريب مباشر لها والتي تُرسم من خلال النقطتين  $P$  و  $P'$ . عندها قد يُفترض التوصل إلى خط من هذا القبيل بالتعبير عن إحداثياته  $x^\nu$  كدالة لـ  $\lambda$ . ليكن الرمز  $\delta$  يشير إلى الانتقال من نقطة الجيوديسي المطلوب إلى النقطة المقابلة للدالة  $\lambda$  على خط

النظرية العامة

132

و

$$\delta \left( \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) = \frac{d}{d\lambda} (\delta x^\nu)$$

نتوصل استناداً إلى (20)، بعد تكامل جزئي، إلى

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \kappa_\sigma \delta x^\sigma d\lambda = 0$$

حيث

$$\kappa_\sigma = \frac{d}{d\lambda} \left\{ \frac{g_{\mu\nu} dx^\mu}{w} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right\} - \frac{1}{2w} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \quad (20\text{ب})$$

باعتبار قيم  $\delta x^\sigma$  عشوائية، فإننا نتوصل بناءً على ذلك، إلى

$$\kappa_\sigma = 0 \quad (20\text{ج})$$

أنها معادلات خط الجيوديسي.

إذا لم ينعدم  $ds$  على طول خط الجيوديسي، فقد نختار "طول القوس"  $s$ ، الذي يُقاس على طول خط الجيوديسي، بالنسبة للوسيط  $\lambda$ . عندها يكون

$$w = 1 \text{ ، بدلاً من (20ج)، نتوصل إلى ما يلي}$$

$$g_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{dx^\sigma}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

أو من مجرد تغيير الترميز

$$g_{a\sigma} \frac{d^2 x^a}{ds^2} + [\mu\nu, \sigma] \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \quad (20\text{د})$$

حيث إننا عند اتباع الكريستوفل، كنّا قد كتبنا

$$[\mu\nu, \sigma] = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right) \quad (21)$$

وأخيراً، إذا ضربنا (20د) بـ  $g^{\sigma\tau}$  (إنَّ الضرب عملية خارجية فيما يتعلق بـ  $\tau$ ، وداخلية فيما يتعلق بـ



$\sigma$ ، فتصبح معادلات خط الجيوديسي على الشكل

$$\frac{d^2 x^\tau}{ds^2} + \{\mu\nu, \tau\} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \quad (22)$$

حيث إنه، عند اتباع كريستوفل، نكون قد حددنا

$$\{\mu\nu, \tau\} = g^{\tau a} [\mu\nu, a]$$

(23)

مجاور. عندها بالنسبة لـ (20)، قد نستبدل

$$\left. \begin{aligned} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \delta w d\lambda &= 0 \\ w^2 &= g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

إلا أنه باعتبار

$$\delta w = \frac{1}{w} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \delta x^\sigma + g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \delta \left( \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) \right\}$$

الشكل (2، 7). تشتق دراسة أينشتاين عن النسبية [Ein]، في الغالب هندسة ريمان وصيغة الجيوديسي.

141

أ. أينشتاين

تُشير هذه العبارة إلى تشكيل الموتَر  $A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu r\sigma}$ . لذا، فإننا إذا قمنا بذلك، فإنَّ الحدود التالية للعبارة بالنسبة لـ  $A_{\mu\sigma\tau}$ ، تلغي حدود  $A_{\mu r\sigma}$ ، الأول، والرابع، والعنصر الذي يتوافق مع الحد الأخير في الأقواس المربعة؛ لأنها جميعاً متناظرة في  $\sigma$  و  $\tau$ . وينطبق الشيء ذاته بالنسبة لمجموع الحدين الثاني والثالث. وبالتالي نحصل على

$$A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu r\sigma} = B_{\mu\sigma r}^\rho A_\sigma \quad (42)$$

حيث

$$B_{\mu\sigma r}^\rho = -\frac{\partial}{\partial x^r} \{\mu\sigma, \rho\} + \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \{\mu\tau, \rho\} - \{\mu\sigma, a\} \{a\tau, \rho\} + \{\mu\tau, a\} \{a\sigma, \rho\} \quad (43)$$

إنَّ الميزة الأساسية لهذه النتيجة هي أنَّه على الجانب الأيمن لـ (42) يحدث  $A_\rho$  فقط، دون مشتقاته. من خصائص الموتَر  $A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu r\sigma}$  بما يتوافق مع حقيقة أن  $A_\rho$  هو متجة عشوائي، فنستنتج أنه بسبب §

النظرية العامة

140

إذا كان الموتَر  $A^{\rho\sigma}$  متناظراً، فإنَّ ذلك يُختزل إلى

$$-\frac{1}{2} \sqrt{-g} \frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} A_{\rho\sigma}$$

في حال أننا قدّمنا، بدلاً من الموتَر  $A^{\rho\sigma}$ ، موتَر موافق التغيّر  $A^{\alpha\beta} = g^{\rho\alpha} g^{\sigma\beta} A_{\rho\sigma}$ ، وهو متناظر أيضاً، فإنَّ الحد الأخير، بمقتضى (31)، قد يفترض الشكل

$$-\frac{1}{2} \sqrt{-g} \frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} A_{\rho\sigma}$$

وفي حال التناظر قيد التساؤل، قد يتم استبدال هذين الشكلين بـ (41)

$$\sqrt{-g} A_\mu = \frac{\partial (\sqrt{-g} A_\mu^\sigma)}{\partial x^\mu} - \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} \sqrt{-g} A_{\rho\sigma} \quad (41 \text{ أ})$$

$$\sqrt{-g} A_\mu = \frac{\partial (\sqrt{-g} A_\mu^\sigma)}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} \sqrt{-g} A_{\rho\sigma} \quad (41 \text{ ب})$$

وهو ما قد نستخدمه لاحقاً.

§ ١٢. موتَر ريمان-كريستوفل

نبحث الآن عن الموتَر الذي يمكن التوصل إليه من

الموتر الأساسي فقط، من خلال التفاضل. للوهلة الأولى، يبدو الحل واضحاً. نضع الموتر الأساسي لـ  $g_{\mu\nu}$  في (٢٧) بدلاً من أي موتر محدد  $A_{\mu\nu}$  وبالتالي يكون له موتر جديد، أي امتداد الموتر الأساسي. إلا أننا نقنع أنفسنا بسهولة أن هذا الامتداد ينعلم بشكلٍ مماثل. فنصل إلى هدفنا على النحو التالي. نستبدل في (٢٧)

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \{\mu\nu, \rho\} A_\rho$$

أي امتداد المنتج الرابع  $A_\mu$ . عندئذٍ (من خلال تسمية مختلفة للأدلة) نحصل على موتر الرتبة الثالثة

$$A_{\mu\sigma\tau} = \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\sigma \partial x_\tau} - \{\mu\sigma, \rho\} \frac{\partial A_\rho}{\partial x_\tau} - \{\mu\tau, \rho\} \frac{\partial A_\rho}{\partial x_\sigma} - \{\sigma\tau, \rho\} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\rho} + \left[ -\frac{\partial}{\partial x_\rho} \{\mu\sigma, \rho\} + \{\mu\tau, \rho\} \{\sigma\tau, \rho\} + \{\sigma\tau, \rho\} \{\mu\sigma, \rho\} \right] A_\rho$$

٧، يكون  $B_{\mu\sigma\tau}^\rho$  موترًا (موتر ريمان-كريستوفل).

إنَّ الأهمية الرياضية لهذا الموتر هي:

إذا كانت طبيعة المتصل هي أنه يوجد نظام إحداثيات بالاستناد إلى أن  $g_{\mu\nu}$  ثابت، عندها ينعلم جميع  $B_{\mu\sigma\tau}^\rho$ . فإذا اخترنا أي نظام جديد للإحداثيات بدلاً من الإحداثيات الأصلية، فلن تكون  $g_{\mu\nu}$  المشار إليها، ثابتة، بل إنه تبعاً لطبيعة الموتر، تنعدم المركبات المنقولة لـ  $B_{\mu\sigma\tau}^\rho$  في النظام الجديد. وبالتالي، فإنَّ موتر ريمان المعدوم هو حالة ضرورية بحيث إنه بالاختيار المناسب لنظام المرجع، قد تكون  $g_{\mu\nu}$  ثابتة. يتطابق ذلك مع الحالة التي تكون فيها \* من خلال الاختيار المناسب لنظام المرجع، النظرية النسبية الخاصة جيدة بالنسبة لمنطقة محددة للمتصل. عند تقلص (٤٣) فيما يتعلق بالدليلين  $\rho$  و  $\tau$  نتوصل إلى موتر موافق التغير من الرتبة الثانية. \* لقد أثبت علماء الرياضيات أن ذلك كفاية أيضاً.

الشكل (٧، ٣). تظهر في الصفحة ١٢٣ صيغة موتر تقوس ريمان، والذي يسميه أينشتاين  $B_{\mu\sigma\tau}^\rho$  بدلاً من  $R_{jkl}^i$ .

## (٧، ٦) بحث أينشتاين

تفسر الصفحات المأخوذة من ترجمة بحث أينشتاين ١٩١٦م، "تأسيس النظرية العامة للنسبية"، [Ein]، بصورة عامة أن النسبية العامة هي في الأساس هندسة ريمان، التي أراد تفسيرها لعالم الفيزيائيين. تبدأ الدراسة في الصفحة ١١١. يظهر تعريف المقياس:

$$ds^2 = \sum_{\tau\sigma} g_{\sigma\tau} dx_\sigma dx_\tau$$

في الصفحة ١١٩ بأحرف سفلية يونانية بدلاً من اللاتينية. ويظهر اشتقاق صيغة الجيوديسي (باستخدام  $\{\mu, \nu, \tau\}$  بدلاً من  $\Gamma_{jk}^i$  بالنسبة لرموز كريستوفل)، من فرضية تباين الانعدام الأول، على الصفحتين ١٣١-١٣٢ (الشكل ٢، ٧). في الصفحة ١٤١ (الشكل ٣، ٧)، يقدم صيغة موتر تقوس ريمان، بحيث يرمز بـ  $\beta_{\mu\sigma\tau}^p$  بدلاً من  $R_{jkl}^i$ . يتطلب الافتراض المبسط المبين في الصفحة ١٤٤ انعدام تقوس ريتشي، حاشية تفسر الافتراض الأكثر تبريراً والذي نسميه الآن انعدام موتر أينشتاين، وهو ما يؤدي إلى النتائج ذاتها (الباب ٤، ٧). وفي الصفحة ١٤٥، نصل إلى الاستنتاج التالي:

توفر لنا هذه المعادلات، التي نتوصل إليها بطريقة الرياضيات البحتة، بناءً على نظرية النسبية العامة، إلى جانب معادلات الحركة (٤٦)، وقانون الجاذبية لنيوتن كتقريب أول، وكتقريب ثانٍ تفسير حركة الحضيض الشمسي لعطارد الذي اكتشفه Leverrier (كما أنها لا تزال بعد إجراء التصحيحات لاضطراب). يجب أن تؤخذ هذه الحقائق، برأيي كبرهان مقنع لتصحيح هذا النظرية.

### تمارين

(٧، ١) ماذا تعني غلبة مدار الأرض بالنسبة إلى نظرية النسبية العامة؟  
 $(e \approx 0.0167, a \approx 1.5 \times 10^{11} m)$  لماذا نقول: إن هذه النتيجة أُستُخدمت للتحقق من النسبية العامة؟

(٧، ٢) إنَّ لكوكب صغير مداراً دائرياً تاماً للمحيط  $2\pi r_0$  قرب الشمس. ما هي سرعته وفقاً للنسبية العامة؟ (استخدم واحده من المعادلات الأربع للجيوديسي.)

(٧، ٣) لقد كان أينشتاين مدفوعاً بعوامل كونية للنظر في الكون من خلال المقياس:

$$d\tau^2 = -(1 - r^2 / R^2)^{-1} dr^2 - r^2 (d\varphi^2 + \sin^2 \varphi d\theta^2) + dt^2$$

(حيث إن  $R$  هنا ثابت، "نصف قطر الكون".)

(أ) هل هذا المقياس متماثل كروياً؟

(ب) ما الوقت الفعلي المنقضي  $\Delta\tau$  بالنسبة لسفينة فضائية للدوران حول نقطة الأصل عند

$r = r_0$  عند  $3/5$  سرعة الضوء؟

(٧, ٤) حجرة فضائية، ليست على الأرض، تتحرك باتجاه الشمس عند  $r = R_1 = 1.5 \times 10^{11}$  متر  
 (~ مدار الأرض) مبدئياً ببطء بـ  $dr/dt = (1 - \alpha^2 R_1^{-1}) \alpha R_1^{-1/2}$  حيث إن  $\alpha = \sqrt{2GM}$ .

(أ) وفقاً للنسبية العامة، كم تستغرق حتى تصل  $r = R_2 = 6.96 \times 10^8$  متر. (~ سطح الشمس)، وفقاً لمراقب المسافة؟ (الإجابة: حوالي  $27 \frac{1}{2}$  يوم).

(ب) على افتراض أن الشمس انكمشت عند "نصف قطر شفارتشيلد"  $R_2 = 2GM = \alpha^2$ ، كم يُستغرق من الزمن حتى الوصول إلى سطح الشمس؟

(٧, ٥) عند النظر في كتلة صغيرة  $m$  على مسافة بعيدة  $R$  عن الشمس. على افتراض أن  $\theta, \phi$  بقيا ثابتين، بين أن المعادلتين ذواتي الصلة (٧, ١٤) و (٧, ١٦) المبيّتين في الباب ٥, ٧ تصبحان

$$-(1 - \gamma r^{-1})^{-1} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 + (1 - \gamma r^{-1}) \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 1$$

$$(1 - \gamma r^{-1}) \frac{dt}{d\tau} = \beta.$$

(إذا لم يُنصَّ على أن  $\gamma = 2GM$ ) استنتج أن

$$\left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = (1 - \gamma r^{-1})^2 - \beta^{-2} (1 - \gamma r^{-1})^3.$$

باعتبار أن  $dr/dt = 0$ ، استنتج أن

$$f(r^{-1}) = \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = (1 - \gamma r^{-1})^2 - (1 - \gamma r_0^{-1})^{-1} (1 - \gamma r^{-1})^3,$$

من خلال  $f'(r_0^{-1}) = \gamma(1 - \gamma r_0^{-1})$ . بالطبع، تقليدياً  $\frac{1}{2} m (dr/dt)^2$ ، الطاقة الحركية

تكافئ خسارة الطاقة الكامنة،  $GMm \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$ ، لذا

$$f(r^{-1}) = \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = 2GM \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

على أن يكون  $f'(r_0^{-1}) = 2GM$ . على افتراض توافق النظريات لا نهائياً مع  $r_0$  كبيرة، استنتج أن  $\gamma = 2GM$ .



## الفصل الثامن

### نظرية جاوس وبونيه

نظرية جاوس وبونيه التي تُعدّ إحدى النتائج البارزة في الرياضيات، حيث تربط الهندسة والطبولوجيا للسطوح. يقدم هذا الفصل لمحة دون عرض العديد من البراهين. من أجل بعض التفسيرات والتطبيقات الفيزيائية (انظر إلى [Lev1]).

#### (٨, ١) صيغة جاوس وبونيه

ليكن  $R$  قرصاً ناعماً في منطوي ريماني ثنائي الأبعاد  $M$  وذو تقوس جاوس  $G$ . ليكن  $\kappa_g$  يرمز إلى تقوس جيوديسي للحدود. عندها يكون

$$(٨, ١) \quad \int_R G + \int_{\partial R} \kappa_g = 2\pi$$

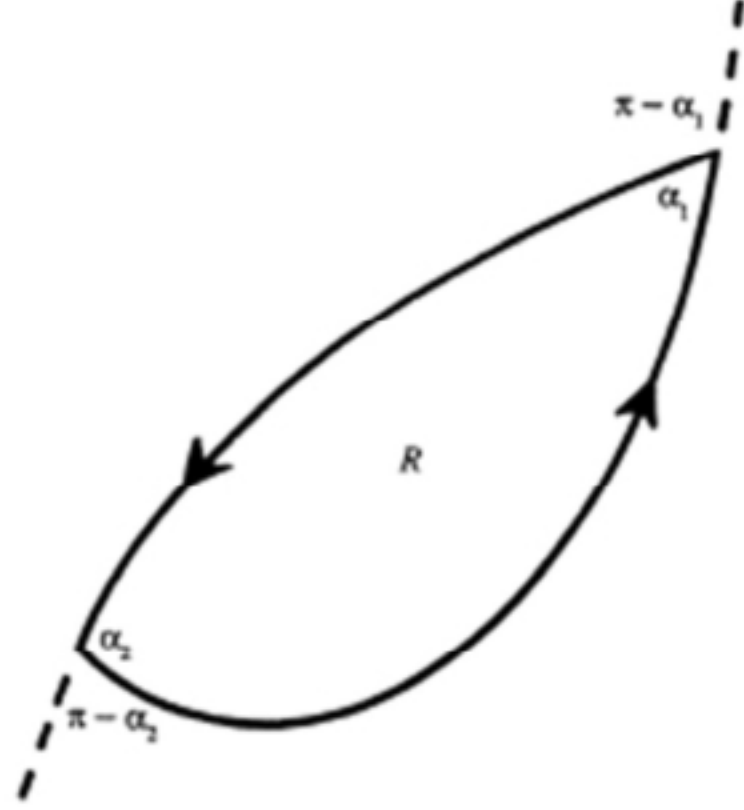
على سبيل المثال، بالنسبة لقرص في المستوي، فإن  $0 + 2\pi = 2\pi$ ، أما بالنسبة للنصف العلوي لكرة الوحدة، فإن  $2\pi + 0 = 2\pi$ .

لاحظ أن هذه الصيغة تعني أن  $G$  داخلي، وفقاً لنظرية جاوس إغريغوم ٦-٣. إن البرهان، كما هو الحال في نظرية إغريغوم، هو حسابات معقدة. إنه يبدأ بصيغة  $G$  في الإحداثيات المحلية ويغيّر  $\int_R G$  إلى تكامل عبر  $\partial R$  باستخدام نظرية جرين.

إذا كان  $\partial R$  زوايا ذات الزوايا الداخلية  $\alpha_i$ ، كما هو موضح في الشكل (٨, ١)، عندها يُفسّر حد التقوس الحدي  $\int_{\partial R} \kappa_g$  في الصيغة (٨, ١) بأنه يتضمن مساهمات منفصلة  $\sum (\pi - \alpha_i)$ . بالمقابل، إذا تعاملنا مع الزوايا بشكل منفصل فإن:

(٨, ٢)

$$\int_R G + \int_{\partial R} \kappa_g + \sum (\pi - \alpha_i) = 2\pi$$



الشكل (٨, ١). زاوية داخلية  $\alpha$  تساهم  $\pi - \alpha$  في  $\int_{\partial R} \kappa_g$ .

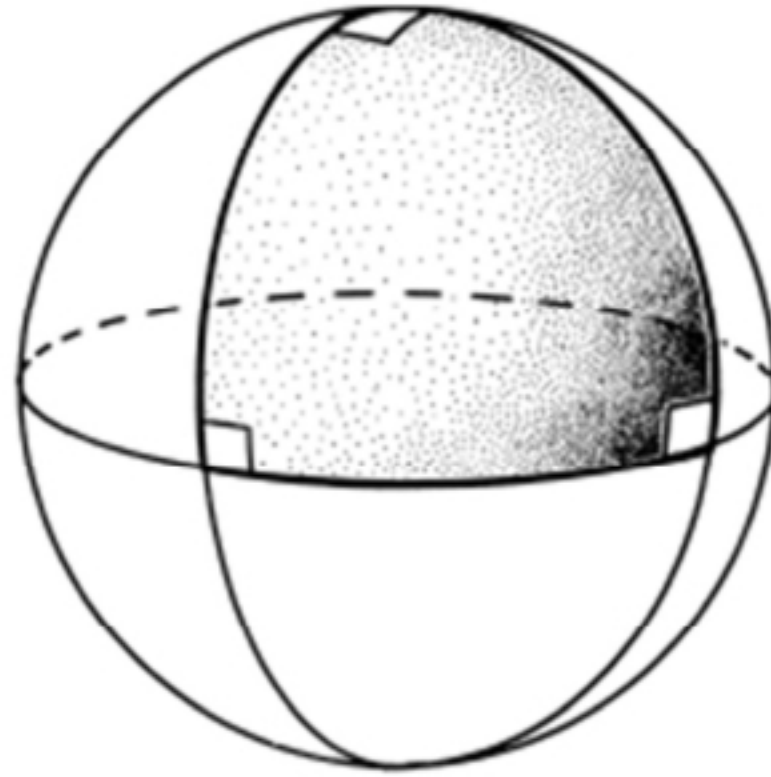
على وجه الخصوص، لمثلث جيوديسي  $\Delta$  يكون

(٨, ٣)

$$\int_{\Delta} G + \pi = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,$$

وكتعديل للجملة المعروفة التي مفادها أنه بالنسبة لمثلث في مستوي، فإن مجموع الزوايا يصل إلى  $\pi$ . باستخدام الزوايا التي تنقلص إلى نقطة، قد نحسب تقوس جاوس على النحو التالي

$$G = \lim \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi}{\text{area } \Delta}$$



الشكل (٨, ٢). بالنسبة لمثلث كروي، يكون مجموع الزوايا  $a_1 + a_2 + a_3 = \pi + A$ . وبالتالي، فإن

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi + \frac{\pi}{2}$$

في كرة الوحدة، يمكن الحصول على مساحة  $A$  في  $\Delta$  من خلال  $\int_{\Delta} G$ :

$$a_1 + a_2 + a_3 = \pi + A, \quad (٨, ٤)$$

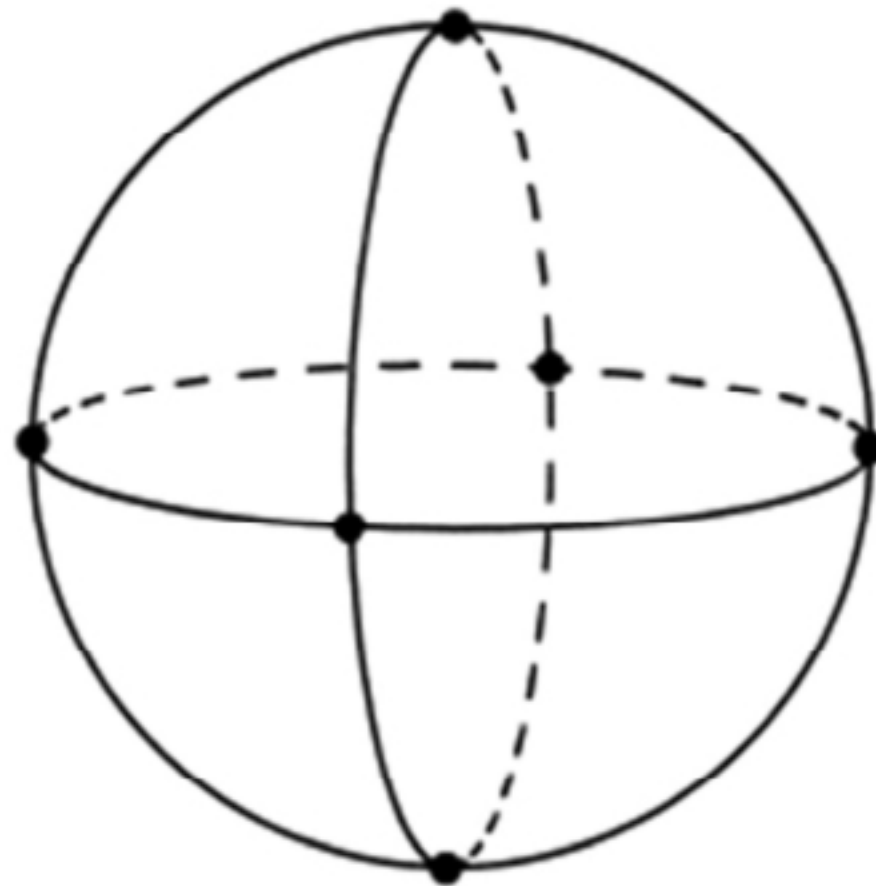
الصيغة الأساسية للمثلثات الكروية. على سبيل المثال، بالنسبة لمثلث الجيوديسي المبيّن في الشكل (٨, ٢) الذي يكون برأس واحد في القطب الشمالي، وبرأسين على خط الاستواء، وبثلاث زوايا قائمة،

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi + \frac{\pi}{2}.$$

لقد توصل جاوس في الأصل إلى الصيغة (٨, ٣) عام ١٨٢٧ م. وقدم بونيه الصيغة (٨, ١) عام ١٨٤٨ م.

### (٨, ٢) نظرية جاوس وبونيه

تعدُّ نظرية جاوس وبونيه نتيجة عمومية عن منظورياني ثنائي الأبعاد متراص وناغم  $M$ . إنها تربط الكمية الهندسية وهي تكامل تقوس جاوس، بالكمية الطوبولوجية وهي ممّيز أويلر  $\chi$ .



الشكل (٨, ٣). إنَّ لكرة الوحدة ممّيز أويلر  $\chi = V - E + F = 6 - 12 + 8 = 2$ . من خلال نظرية جاوس

$$\int G = 4\pi = 2\pi\chi$$

وبونيه نحصل على



بالنسبة لأي مُثَلثة لـ  $M$ ، مع رؤوس  $V$ ، وأضلاع  $E$ ، وأوجه  $F$ ، حيث يُعرّف  $\chi$  على أنه  $\chi = V - E + F$ . تنص النظرية على أن

$$\int_M G = 2\pi\chi \quad (٨, ٥)$$

على سبيل المثال، في كرة الوحدة، المثلثات عند خط الاستواء ذات دائرتين كبيرتين متعامدتين لخط الطول. (كما هو موضح في الشكل ٨, ٣). إنَّ مميّز أويلر هو

$$\chi = V - E + F = 6 - 12 + 8 = 2.$$

وبالتالي يكون

$$\int G = 4\pi = 2\pi\chi.$$

تتمثل إحدى النتائج الرائعة للمعادلة (٨, ٥) في أنَّ مميّز أويلر هو خيار مستقل لمُثَلثة، وبالتالي فهو متغير غير طوبولوجي. في الواقع، بالنسبة لسطح من نوع  $g$ ، يكون مميّز أويلر  $\chi = 2 - 2g$ .

إنَّ النتيجة الثانية الباهرة للمعادلة (٨, ٥) هي أنَّ  $\int G$  مستقل عن المقياس، فهو يستند فقط إلى طوبولوجيا  $M$ .

برهان نظرية جاوس وبونيه. عند تثبيت تثليث  $M$ . عند كل مثلث  $\Delta$ ، تصبح صيغة جاوس وبونيه، المعادلة (٨, ٢)

$$\int G = - \int_{\partial\Delta} \kappa_g + \sum \alpha_i - \pi.$$

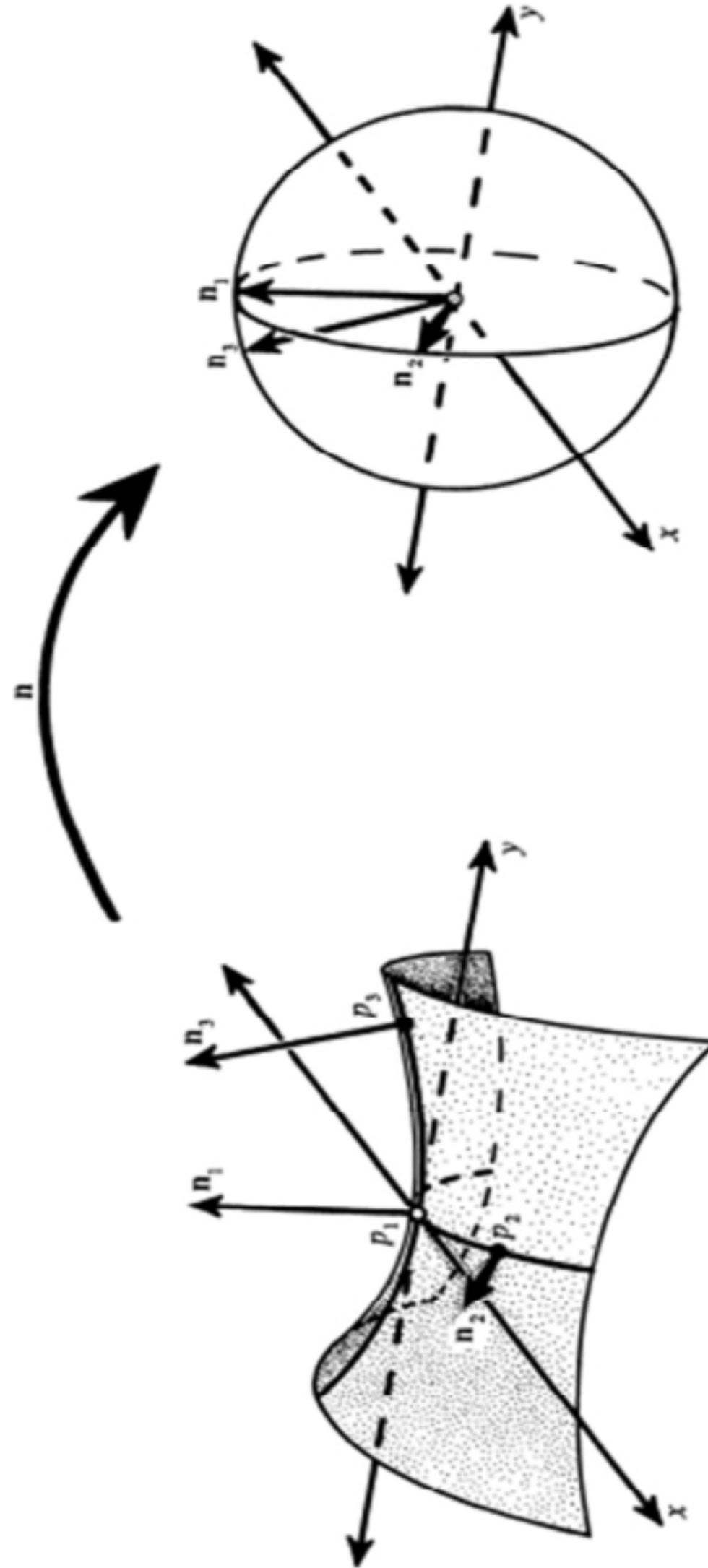
والآن إذا أضفنا صيغ جميع المثلثات. فإنَّ الحدَّ الأول يساهم في  $\int_M G$ . باعتبار وقوع كل ضلع مرتين في اتجاهين معاكسين، فإنَّهُ يُختصر  $\int \kappa_g$ . تصل مجموع الزوايا المحيطة بكل رأس إلى  $2\pi$ ، لذا يساهم حد الزاوية في  $2\pi V$ .

يساهم الحد الأخير في  $\pi F$ . وأخيراً وباعتبار أن لكل وجه ثلاثة أضلاع وفي كل وجه رأسان،  $E = \frac{3}{2}F$ . وبالتالي فإنَّ

$$\int_M G = 2\pi V - \pi F = 2\pi \left( V - \frac{3}{2}F + F \right) = 2\pi(V - E + F) = 2\pi\chi.$$

(٨, ٣) تطبيق جاوس لسطح في  $\mathbb{R}^3$

إنَّ تطبيق جاوس لسطح  $M$  في  $\mathbb{R}^3$  هو ناظمي الوحدة  $\mathbf{n}: M \rightarrow S^2$ . في هذا السطح كما هو مبين في الشكل ٤, ٨، نجد أنه مماس للمستوي  $x, y$  عند نقطة الأصل  $p_1$ ، مع التقوسات الرئيسة  $\kappa_1$  على طول محور  $x$ ، و  $\kappa_2$  على طول محور  $y$ . لغرض التفسير، افترض أن  $\kappa_1 < 0$  و  $\kappa_2 > 0$ .



الشكل (٤, ٨). يرسل تطبيق جاوس نقطة إلى ناظمة الوحدة في الكرة.

نريد دراسة المشتقة  $Dn$ ، التي تُسمى بتطبيق ينغارتن. إذا تحركنا في الاتجاه  $x$  من النقطة  $p_1$  نحو النقطة  $p_2$ ، تتحول  $n$  في اتجاه  $x$  إلى كمية متناسبة مع  $|k_1|$ ، إلا أن هذه الكمية موجبة، في حين أن  $k_1$  سالبة. في الواقع، إن العمود الأول لتطبيق ينغارتن  $Dn$  هو  $\begin{bmatrix} -k_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . إذا تحركنا في الاتجاه  $y$  من النقطة  $p_1$  نحو النقطة  $p_3$ ، تتحول  $n$  في اتجاه  $y$  السالب إلى كمية متناسبة مع

$|k_2|$ . إن العمود الثاني لتطبيق ينغارتن  $Dn$  هو  $\begin{bmatrix} 0 \\ -k_2 \end{bmatrix}$ . وبالتالي فإن

$$Dn = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{bmatrix} = -II.$$

تُستخدم هذه المتطابقة في أي إحداثيات متعامدة. حيث إن جاكوبي لتطبيق جاوس يساوي تقوس جاوس:

$$\det Dn = k_1 k_2 = G.$$

إذا كانت  $M$  كرة طوبولوجية، وكان لـ  $n$  الدرجة 1 (أي، تغطي الكرة لمرة واحدة، جبرياً)، و

$$\int_M G = \text{area}(\text{image } n) = 4\pi = 2\pi\chi.$$

لقد استعدنا نظرية جاوس وبونيه لكرة في  $\mathbb{R}^3$ . بالنسبة للتراص العمومي لـ  $M$  في  $\mathbb{R}^3$ ، يكون لـ  $n$  الدرجة  $\chi/2$  بحيث إن

$$\int_M G = \frac{\chi}{2} 4\pi = 2\pi\chi,$$

نظرية جاوس وبونيه لأي سطح مغلق في  $\mathbb{R}^3$ .

#### (٤, ٨) تطبيق جاوس لسطح زائدي

بالنسبة لسطح زائدي  $M^n$  في  $\mathbb{R}^{n+1}$ ، يكون تطبيق جاوس  $n: M \rightarrow S^n$ . في الإحداثيات المتعامدة المحاذية لاتجاهات التقوس الرئيس عند نقطة معينة، يكون تطبيق ينغارتن

$$D\mathbf{n} = \begin{bmatrix} -\kappa_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & -\kappa_n \end{bmatrix} = -\mathbf{II},$$

وجاكوبي  $\mathbf{n}$  هو

$$(-\kappa_1) \cdots (-\kappa_n) = (-1)^n G,$$

إذا عُرِّف تقوس جاوس  $G$  بأنه  $\kappa_1 \cdots \kappa_n = \det \mathbf{II}$ . بالنسبة للسطوح، إذا كانت  $n$  زوجية، فإن درجة  $n$  هي نصف ممّيز أويلر

$$\chi = V - E + F - \cdots$$

و

$$(٨, ٦) \quad \int_M G = \frac{\chi}{2} \text{area } S^n,$$

وضع العالم H. Hopf عام ١٩٢٥ م تعميماً لنظرية جاوس وبونيه فيما يتعلق بالسطوح الزائدية [Hop]. (إذا كان  $n$  فردياً، فإن  $\chi = 0$ ).

#### (٨, ٥) نظرية جاوس وبونيه وتشرن

يُطبّق تعميم نظرية جاوس وبونيه (٨, ٥) على أي منطورياني زوجي الأبعاد ناعم ومتراص  $M$ . توصل C. B Allendoerfer [All1] و W. Fenchel [Fen] و A. Weil و Allendoerfer [All2] عام ١٩٤٣ م إلى برهان خارجي وتوصل S.-S. Chern [Che3] إلى برهان داخلي عام ١٩٤٤ م. (كما هو موضح في [Got] Gottlieb و [Spi] Spivak، المجلدات من الثالث إلى الخامس).

تتطلب الصياغة والبرهان تعريف تقوس جاوس  $G$  في الإحداثيات المحلية. إنه [Spi، Vol، الرابع، الصفحة ١٠١]

$$G = \frac{1}{2^{n/2} n! \det g_{ij}} R_{i_1 i_2 j_1 j_2} R_{i_3 i_4 j_3 j_4} \cdots R_{i_{n-1} i_n j_{n-1} j_n} \varepsilon^{i_1 \cdots i_n} \varepsilon^{j_1 \cdots j_n},$$

حيث  $\varepsilon^{i_1 \cdots i_n} = \pm 1$  وفقاً لما إذا كان  $i_1, \dots, i_n$  تبديلاً زوجياً أو فردياً. على سبيل المثال، بالنسبة لسطح ثنائي الأبعاد مماس للمستوي  $x_1, x_2$  عند 0 في  $\mathbb{R}^n$ ، على أن يكون  $x_1, x_2$  إحداثيات محلية،  $\det g_{ij} = 1$  و

$$G = \frac{1}{2!2!} (R_{1212} - R_{1221} - R_{2112} + R_{2121}) = R_{1212},$$

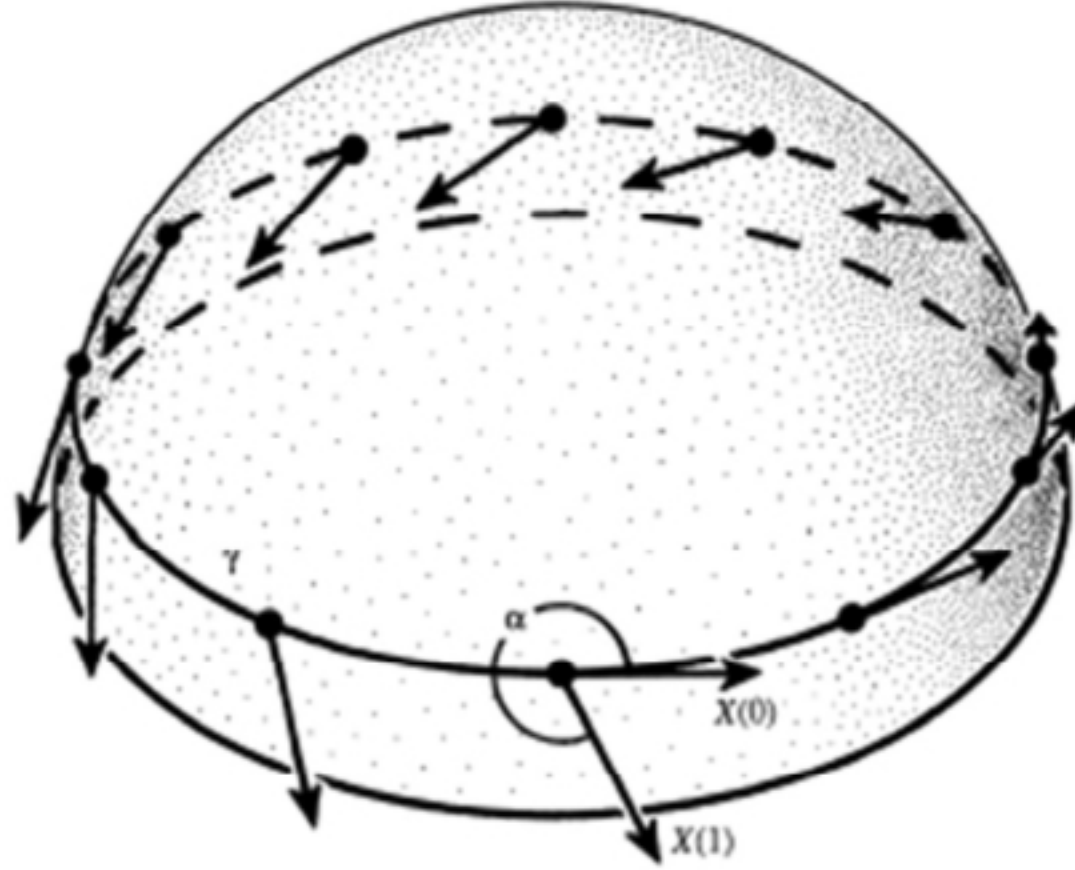
تقوس جاوس للمقطوعة الوحيدة الموجودة هناك (قارن ذلك بالمعادلة (٥, ٣)).

في واقع الأمر، استخدم تشرن لغة الأشكال التفاضلية والأطر المتحركة. وعرف تقوس جاوس  $G$  بأنه Pfaffian بفافي (الجذر التربيعي للمحدد) لأشكال تقوس معينة. لقد أطلق عمله الرائد عن حزم الألياف مرحلة جديدة في الهندسة التفاضلية.

### (٨, ٦) الانتقال المتوازي

يُسمى حقل المتجهات على منحنى متوازٍ إذا انعدمت المشتقة المتغيرة على طول المنحنى (كما هو موضح في المعادلة (٦, ١٦)). قد يتبع بصورة منفردة متجة عند نقطة معينة على المنحنى "من خلال الانتقال المتوازي" كحقل متجهات متوازٍ. في فضاء إقليدس، يكون حقل المتجهات المتوازي ثابتاً—أي أن جميع المتجهات "متوازية".

في منطورياني  $M$ ، يكون الجيوديسي منحنى إذا وفقط إذا كان مماس الوحدة  $T$  متوازياً. إذا كان  $M$  سطحاً ثنائي الأبعاد، فإن  $\gamma$  منحنى، و  $\theta$  هو الزاوية بين حقل المتجهات المتوازي  $X$  و مماس الوحدة  $T$ .



الشكل (٨, ٥). تقوس جيوديسي  $\kappa_g = d\theta/ds$ ، حيث  $\theta$  هي الزاوية من حقل المتجهات المتوازي  $X$  إلى مماس الوحدة  $T$ . من خلال صيغة جاوس وبونيه، الزاوية  $\alpha$  هي الزاوية من  $X(0)$  الأولى إلى  $X(1)$  الأخيرة حيث تساوي  $\int G$ . على سبيل المثال، ينطوي التوجه شرقاً على طول دائرة خط العرض في نصف كرة الوحدة الشمالي، على الانحناء نحو اليسار (فكر بدائرة صغيرة حول القطب الشمالي). بالنسبة لخط العرض القريب من خط الاستواء، يكون

هذا الأثر صغيراً، وينتهي حقل المتجهات المتوازي متجهاً قليلاً نحو اليمين، أي أنه عند الزاوية  $\alpha$  لـ  $2\pi$  تقريباً نحو اليسار. من المؤكد أن المساحة المحصورة هي أيضاً  $2\pi$  تقريباً، مساحة نصف الكرة الشمالي بتمامه.

عندئذ يكون تقوس جيوديسي  $\kappa_g = d\theta/ds$ . إذا كان  $\gamma$  منحنى مغلقاً، ستكون نتيجة (1) الانتقال المتوازي  $X$  حول المنحنى عند الزاوية  $\alpha$  من متجة البداية  $X(0)$ . (كما هو موضح في الشكل ٥، ٨). من خلال صيغة جاوس وبونيه (١، ٨)،

$$2\pi - \int G = \int \kappa_g = \int \frac{d\theta}{ds} = 2\pi - \alpha,$$

لذا  $\alpha = \int G$ . بالتالي، يمكن تفسير تقوس جاوس بأنه المقدار الصافي لتحول المتجة في ظل الانتقال المتوازي حول المنحنى المغلق الصغير.

بصورة أعم، في منطو ريماني  $M$  ذي البعد الأعلى، يمكن تفسير  $R_{ijkl}$  بأنه مقدار تحول المتجة في المستوي  $e_i, e_j$  في ظل الانتقال المتوازي حول منحنى مغلق صغير في المستوي  $e_k, e_l$ . لقد لاحظنا بوضوح الشكل متناهي الصغر لتفسير تقوس ريمان وكان هذا في الصيغة (١٣، ٦):

$$X^i_{;k;l} - X^i_{;l;k} = -\sum_j R^i_{jkl} X^j.$$

يصف الجانب الأيسر التأثيرات على  $X$  للتحرك في متوازي أضلاع متناهٍ في الصغر؛ أولاً في الاتجاه  $k$ ، ثم في الاتجاه  $l$ ، ثم في الاتجاه  $-k$ ، ثم في الاتجاه  $-l$ . يعطي  $R^i_{jkl}$  مقدار المركبة  $i$  للمتجة الأصلي  $X$  الذي يساهم في المركبة  $i$  للتغير في  $X$ .

(٨، ٧) برهان نظرية جاوس وبونيه في  $\mathbb{R}^3$

لقد بين الكاتب من قبل Ambar Sengupta برهاناً ميسراً لصيغة جاوس وبونيه (١، ٨)، فيما يتعلق بالسطوح في  $\mathbb{R}^3$ . بعد ذلك، يمكن اتباع نظرية جاوس وبونيه ٨، ٥ بسهولة كما هو موضح في الباب (٨، ٢).

يبدأ البرهان بإثبات سهل لصيغة مثلث جيوديسي في معادلة كرة الوحدة (٨، ٤)،



(٨, ٧)

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi + A,$$

الذي يعود إلى Thomas Harriot (١٦٠٣م، كما هو موضح في Lohne [Loh]، الصفحة [٣٠١]). يلي ذلك صيغة منطقة قرص ناعم  $R$  على الكرة، من خلال التقريب:

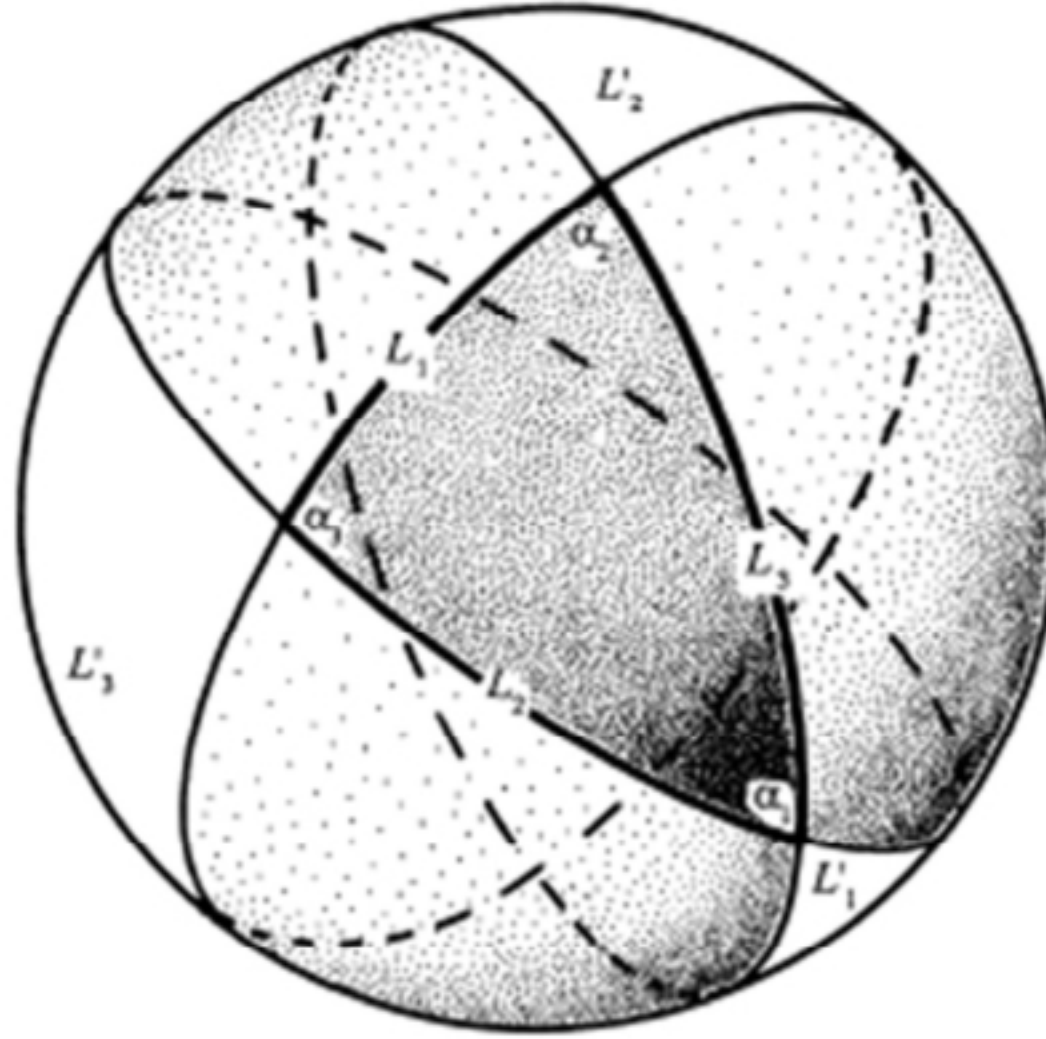
(٨, ٨)

$$\text{area}(R) + \int_{\partial R} \kappa_g = 2\pi.$$

وأخيراً، تستنتج من خلال التفكير في البرهان بطريقة جيدة أن صيغة منطقة قرص ناعم  $R$  على أي سطح ناعم  $M$  في  $\mathbb{R}^3$  هي:

(٨, ٩)

$$\int_R G + \int_{\partial R} \kappa_g = 2\pi.$$



الشكل (٨, ٦). في كرة الوحدة، يكون مجموع  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$  لزوايا مثلث جيوديسي يساوي  $\pi + A$ ، وفقاً لما يمكن إثباته باعتبار المثلث تقاطعاً لثلاثة أهلة  $L_i$ ، مساحة كل منها  $2\alpha_i$ .

لإثبات المعادلة (٨, ٧)، نتصور مثلثاً جيوديسياً  $\Delta$  لمساحة  $A$  والزوايا  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ، المحدودة بثلاث دوائر كبيرة كما هو موضح في الشكل ٨, ٦. نجد أن كل زوج من الدوائر الكبيرة يحيط بهلالين متطابقين  $L_i, L_i'$ ، مع الزوايا  $\alpha_i$ . تتقاطع الأهلة  $L_i$  في  $\Delta$ ؛ وتتقاطع الأهلة  $L_i'$  في مثلث متطابق  $\Delta'$  خلف الكرة. إنَّ للهلال  $L_i$  مساحة متناسبة مع  $\alpha_i$ ؛ عند النظر في الحالة

المتطرفة  $\alpha_i = \pi$  يتبين لنا أن مساحة  $L_i$  تساوي  $2\alpha_i$ . باعتبار  $L_i$  متطابقاً مع  $L_i'$  فإن لكل منهما مساحة  $2\pi$ . بالتالي

$$2\pi = \text{area}(\cup L_i) = \sum \text{area}(L_i) - 2A = 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - 2A.$$

وبالتالي  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi + A$ ، كما هو مطلوب.

عند جمع مثلثات جيوديسي، نتوصل إلى أنه يكون أي مضلع جيوديسي في الكرة على النحو التالي

$$\text{area}(R) = \sum (\pi - \alpha_i) = 2\pi.$$

لاستنتاج المعادلة (٨, ٩)، انظر في تطبيق جاوس  $S^2 \rightarrow M: \mathbf{n}$ . باعتبار الجاكوبي هو

تقوس جاوس  $G$ ، يُطبق تطبيق جاوس  $\mathbf{n}$  منطقة  $R$  إلى منطقة  $R'$  للمساحة  $A = \int_R G$ .

ليكن  $\gamma(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) المنحنى الذي يحيط بـ  $R$ . وليكن  $X(t)$  حقل المتجهات المتوازي

في  $\gamma$ ، لذا فإن  $\dot{X}(t)$  هو مضاعف  $\mathbf{n}$ . على طول المنحنى  $\gamma'(t) = \mathbf{n} \circ \gamma(t)$  في الكرة، يكون

ناظمي الوحدة ذاته، لذا لا يزال  $X(t)$ ، المتحرك بشكلٍ مادي في  $\mathbb{R}^3$  إلى الكرة، متوازياً.

لتكن  $\alpha$  الزاوية من  $X(0)$  إلى  $X(1)$ . عندها يكون  $\int_{\partial R} \kappa_g - 2\pi$  و  $\int_{\partial R'} \kappa_g - 2\pi$

يساويان  $-\alpha$  (كما هو موضح في الشكل (٨, ٥)). وبالتالي فإن

$$\int_R G + \int_{\partial R} \kappa_g - 2\pi = \text{area}(R') + \int_{\partial R'} \kappa_g - 2\pi = 0$$

باستخدام المعادلة (٨, ٨)، نستطيع أن نثبت المعادلة (٨, ٩).

تشير المساحة  $(R')$  إلى أن المساحة الجبرية وهي  $R'$ ، سلبية إذا كان تقوس جاوس  $G$

سلبياً ويعكس  $\mathbf{n}$  الاتجاه. وعلى نحوٍ مماثل، يجب تفسير  $\int_{\partial R} \kappa_g - 2\pi$ ، حيث إنه على سبيل

المثال، إذا كان تقوس جاوس  $G$  سلبياً، فإنه يغير الإشارة أيضاً.

### تمارين

(٨, ١) حاول التحقق مباشرةً من صيغة جاوس لمثلث جيوديسي  $a_1 + a_2 + a_3 = \pi + \int G$

بالنسبة لأي مثلث جيوديسي متساوي الساقين في الكرة. (قد تضع رأساً واحداً في القطب

الشمالي).



(٨, ٢) احسب ممّيز أويلر لكرة تكون 2، ولطارة تكون 0، ولطارة بثقبين تكون 2- باستخدام التثليث.

(٨, ٣) حاول أن تبرهن مباشرةً أنّ ممّيز أويلر مستقل عن التثليث.

(٨, ٤) لكرة  $S$  مدوّرة ثنائية الأبعاد في  $\mathbb{R}^3$  يكون نصف قطرها  $a$ .

(أ) استخدم  $dA = |\mathbf{x}_\varphi \wedge \mathbf{x}_\theta| d\varphi d\theta$  لتبيّن أن  $\int_S G dA = \frac{1}{a^2} \int_S dA = 4\pi$ .

(ب) استخدم  $dA = \sqrt{\det g_{ij}} d\varphi d\theta$  لتتوصل إلى ذات النتيجة.

(٨, ٥) استخدم  $dA = \sqrt{\det g_{ij}} d\varphi d\theta$  لحساب  $\int_T G dA = 0$  فيما يتعلق بالطارة  $T$  في التمرين ١, ٦.

(٨, ٦) في إحدى الليالي حوالي الساعة ٩:٠٠ مساءً في المتحف العلمي في بوسطن، لاحظتُ نوّاساً يتأرجح في الاتجاه  $v$ ، وقد دار  $120^\circ$  درجة من اتجاه البداية المعلنّ بالساعة ٩:٠٠ صباحاً.

(أ) ما خط عرض بوسطن؟

(ب) هل كان  $v$  يدور باتجاه عقارب الساعة أم عكس اتجاه عقارب الساعة؟

(٨, ٧) صح / خطأ

(أ) يمكن التوصل إلى كل متجة وحدة في كرة الوحدة المدوّرة من أي متجة آخر من خلال الإزاحة المتوازية على طول بعض المنحنى.

(ب) يمكن التوصل إلى كل متجة وحدة في أسطوانة الوحدة المدوّرة من أي متجة آخر من خلال الإزاحة المتوازية على طول بعض المنحنى.

(٨, ٨) استعراض المسألة على الكرة. عند النظر في الكرة المدوّرة ثنائية الأبعاد  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  التي يبلغ نصف قطرها  $a$ .

(أ) أوجد التقوس المقطعي، وتقوس ريتشي، والتقوس القياسي، والتقوس الوسطي القياسي، ومتجة التقوس الوسطي.

(ب) احسب تقوس جيوديسي لخط الاستواء.

(ج) بيّن أن لدائرة خط العرض بالنسبة لـ  $0 < \varphi < \pi/2$  ثابتاً، حيث إن تقوس جيوديسي هو

$$\kappa = \cos \varphi / (a \sin \varphi)$$

(د) تحقق من أن صيغة جاوس وبونيه بالنسبة للمنطقة القطبية المغلقة من  $C$ .

(٨, ٩) إذا كان  $C \subset \mathbb{R}^3$  معرفاً بالعلاقة:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 0 \leq z \leq 2$$

(أ) احسب التقوس الوسطي وتقوس جاوس عند نقطة عمومية. ثم تحقق من إجابتك بالنسبة للتقوس الوسطي باستخدام التمرين ٧, ٣.

(ب) ما هو تقوس ريتشي والتقوس القياسي  $R$  عند نقطة عمومية؟ وما هو موتر أينشتاين؟

(ج) احسب تقوس جيوديسي القياسي  $K_g$  لدائرة في  $C$  على ارتفاع  $z$ .

(د) احسب مساحة الجزء  $C$  داخل كرة حوالي 0 لنصف القطر  $r \leq 2$ .

(هـ) إنَّ الجزء  $C$  بحيث  $0 \leq z \leq 1$  هو قرص طوبولوجي. أثبت أنَّ صيغة جاوس وبونيه

خاطئة بالنسبة لهذا القرص. ما هي فرضية صيغة جاوس وبونيه التي لا يمكن أن تتحقق هنا؟

(و) أوجد طول أقصر جيوديسي في  $C$  من النقطة  $(0, -1, 1)$  إلى النقطة  $(0, 1, 1)$ .



## الفصل التاسع

### الجيوديسي والهندسة العمومية

لم يتطرق منهجنا الميسر إلى دراسة معمّقة في الجيوديسي أو حتى التطبيق الأسّي. يناقش هذا الفصل الجيوديسي وبعض النظريات التي تصل إلى استنتاجات عمومية من فرضيات التقوس المحلية. فعلى سبيل المثال، توصّلت نظرية بونيه (٥, ٩) إلى حد قطر  $M$  استناداً إلى حد التقوس المقطعي. قدّم كلّ من Cheeger and Ebin [Chel] و Petersen [Pet1, Pet2] مراجع جيدة لهذه الموضوعات في هندسة ريمان العمومية.

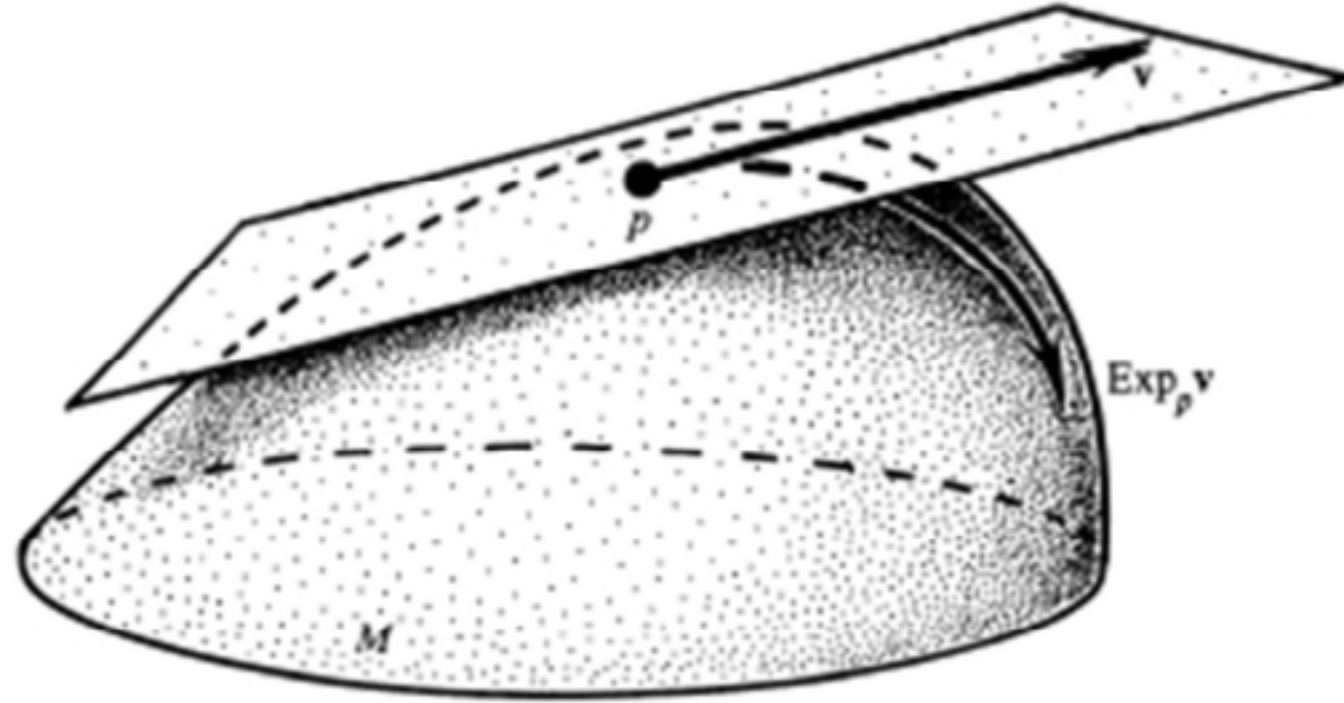
ليكن  $M$  منطوياً ريمانياً ناعماً. تذكر أنه من خلال نظرية المعادلات التفاضلية، هناك جيوديسي وحيد عبر كل نقطة في كل اتجاه. على افتراض أن  $M$  تام (من ناحية الجيوديسي) — أي قد يكون الجيوديسي متصلاً على نحوٍ غير محدود. (قد يتداخل الجيوديسي ببعضه حيث يلف خط الاستواء بشكلٍ متكرر حول الكرة.) إنّ هذه الحالة تعني أنه ليس لـ  $M$  حد ولا نقاط مفقودة.

#### (٩, ١) التطبيق الأسّي

يُعرّف التطبيق الأسّي  $\text{Exp}_p$  عند النقطة  $p$  في  $M$  بأنه تطبيق الفضاء المماسي  $T_p M$  إلى  $M$  بإرسال المتجه  $v$  في  $T_p M$  إلى النقطة في  $M$  مسافة  $|v|$  على طول الجيوديسي من النقطة  $p$  في الاتجاه  $v$ . (كما هو موضح في الشكل ١, ٩.) على سبيل المثال، لتكن  $M$  دائرة الوحدة في المستوي المركب  $C$ ،  $p = 1, T_p M = \{iy\}$ . عندها يكون

$$\text{Exp}_1(iy) = e^{iy}.$$

(كما هو موضح في الشكل ٢, ٩).



الشكل (١, ٩). يحدد التطبيق الأسّي  $\text{Exp}_p$ ،  $v \in T_p M$  إلى نقطة مسافة  $|v|$  على طول الجيوديسي في الاتجاه  $v$ .

كمثال ثانٍ، ليكن  $M$  زمرة لي  $SO(n)$  لدوران  $\mathbb{R}^n$ ، الممثلة من خلال

$$SO(n) = \left\{ n \times n \text{ matrices } A A^t = I \text{ and } \det A = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^{n^2}.$$

يتألف الفضاء المماسي في مصفوفة المتطابقة  $I$  من جميع المصفوفات المتناظرة تخالفياً،

$$T_I SO(n) = \left\{ A : A^t = -A \right\},$$

وذلك لأن اختلاف العلاقة المحددة  $AA^t = I$  يعطي  $IA^t + AI^t = 0$ ، أي  $A^t = -A$ .

(كما هو موضح في الشكل ٣, ٩).

يتم التوصل إلى التطبيق الأسّي في  $T_I SO(n)$  من خلال دالة المصفوفة الأسية المعروفة من

الجبر الخطي:

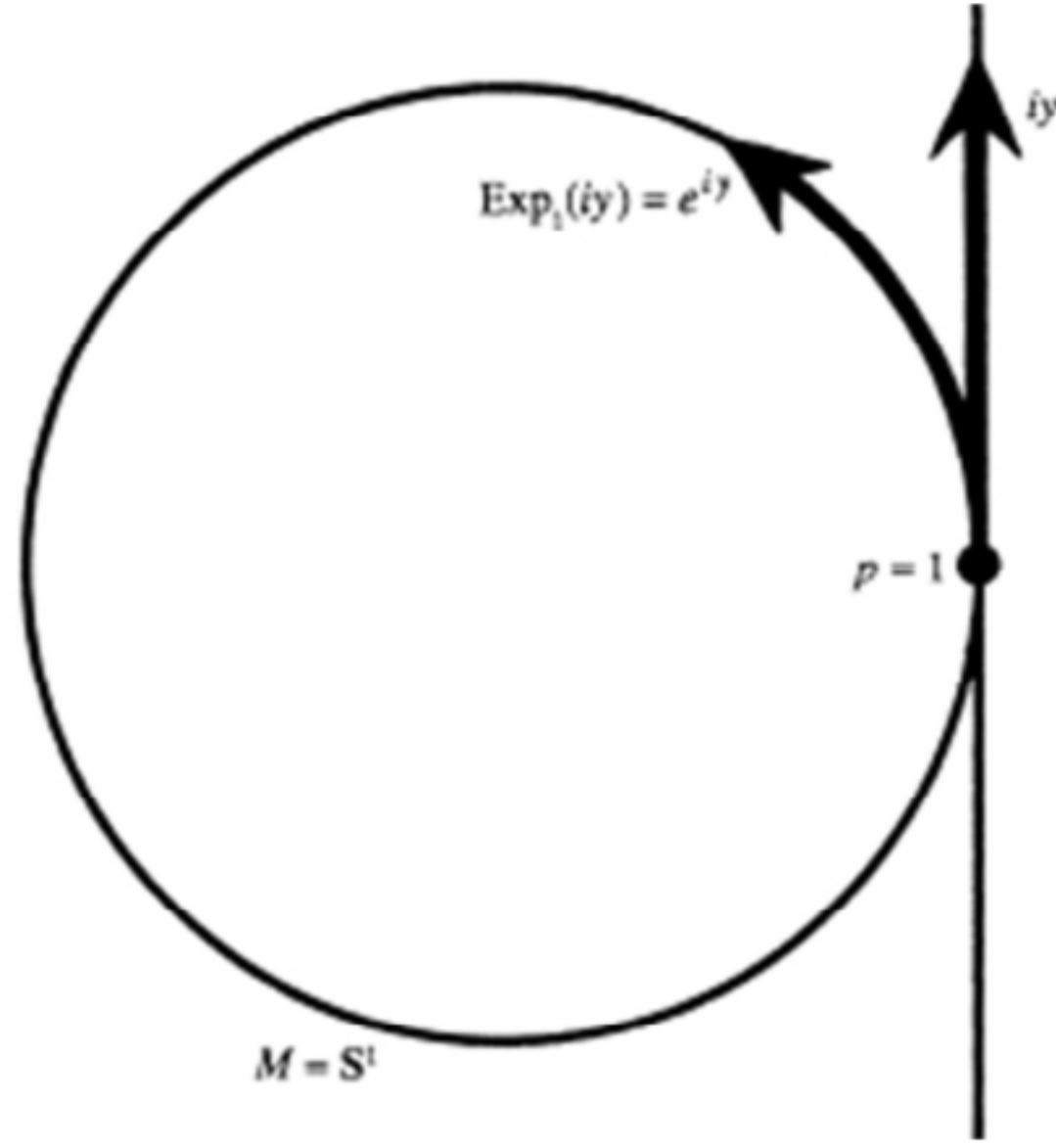
$$\text{Exp}_I(A) = e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots$$

بالنسبة لأي نقطة  $p$  في منطوي ريماني ناعم  $M$ ، يكون التطبيق الأسّي  $\text{Exp}_p$  تماثلاً

تفاضلياً ناعماً عند 0. إنه يوفر إحداثيات تُسمى *الإحداثيات الناعمة* جوار النقطة  $p$ . إنَّ

للإحداثيات الناعمة خاصية مفيدة وهي أن المقياس  $g_{ij} = I$  رتبة أولى عند النقطة  $p$ . (قارن

ذلك بالنظرية ٦, ٣).

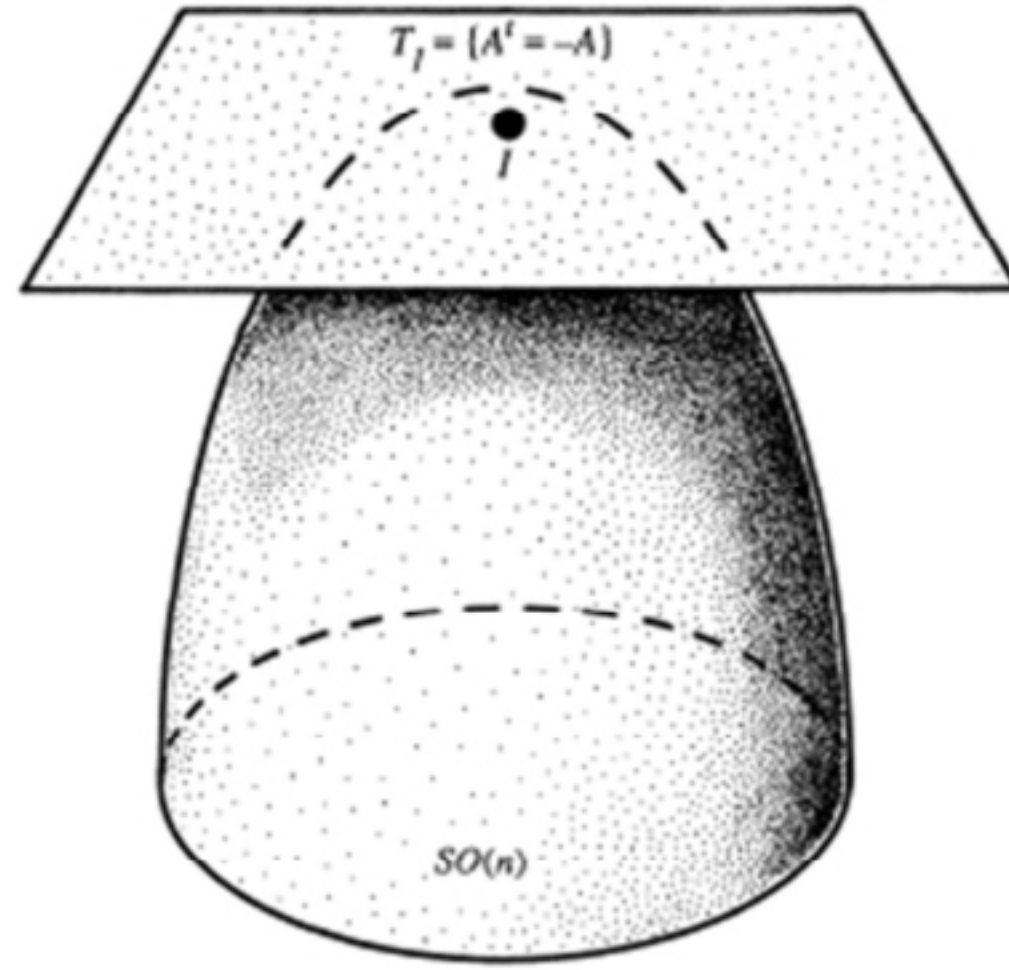


الشكل (٩, ٢). بالنسبة للدائرة  $M$ ، يكون الفضاء المماس  $T_1M = \{iy\}$  والتطبيق الأسّي هو  $\text{Exp}_1(iy) = e^{iy}$ .

تعدُّ الكرة الصغيرة المفتوحة في الإحداثيات الناعمة، بسيطة ومحدّبة: بوجود جيوڊيسي وحيد بين أي نقطتين. (يُقصد بـ بسيطة أنها في الغالب واحدة؛ ويُقصد بـ "محدّبة" أنها على الأقل واحدة.) إضافةً إلى ذلك، فإنّ ذلك الجيوڊيسي هو المسار الأقصر في جميع  $M$  بين النقطتين. تقول نظرية هوف رينو (Hopf-Rinow) أنه مادامت  $M$  متصلة، فإن هناك جيوڊيسياً يعطي المسار الأقصر بين أي نقطتين. وعلى وجه الخصوص، يحدد التطبيق الأسّي  $\text{Exp}_p$ ،  $T_pM$  إلى  $M$ .

### (٩, ٢) تقوس $SO(n)$

كمثال، سوف نحسب الآن تقوس  $SO(n)$ . في الفصل الخامس عرّفنا المتوتر الأساسي الثاني لمنطو جزئي  $M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  من تحويل معدل  $\kappa$  لمماسات الوحدة على طول كل منحنى شريحة. طالما أننا نأخذ المركبة الناعمة، فإن أي منحنى يتجه في الاتجاه ذاته وأي حقل متجهات مماسي يبدأ بالمتجه المماسي ذاته، سيعطي النتيجة ذاتها.



الشكل (٩,٣). بالنسبة للزمرة المتعامدة الخاصة  $SO(n)$ ، يكون الفضاء المماسي هو  $T_I SO(n) = \{A : A^t = -A\}$  والتطبيق الأسّي هو  $\text{Exp}_I(A) = e^A$ .

ليكن  $\{E_i\}$  أساساً متعامداً لـ  $T_I SO(n) = \{A = -A^t\}$ . فقد يتم حساب المركبة  $ij$  للشكل الأساسي الثاني  $\Pi$  على أنها المركبة النازمية للمشتقة على طول المنحنى  $e^{sE_i}$  لحقل المتجهات  $e^{sE_i} E_j$ . (باعتبار أن  $e^{sE_i}$  تحدد  $I$  لـ  $e^{sE_i}$ ، فإنه يحدد  $E_j$  لمتجه المماس  $(e^{sE_i}) E_j$  نحسب أولاً

$$\frac{d}{ds} \left( e^{sE_i} E_j \right) = \frac{d}{ds} (1 + sE_i + \dots) E_j = E_i E_j,$$

يُتوصّل إلى الإسقاط في الفضاء النازمي للمصفوفات المتناظرة من العلاقة

$$\frac{1}{2} \left[ (E_i E_j) + (E_i E_j)^t \right] = \frac{1}{2} (E_i E_j + E_j E_i),$$

وبالتالي

$$\Pi = \frac{1}{2} (E_i E_j + E_j E_i).$$

يُتوصّل إلى التقوس المقطعي  $E_i, E_j$  من العلاقة

$$K(E_i, E_j) = \frac{1}{4} \left[ 2E_i^2 \cdot 2E_j^2 - (E_i E_j + E_j E_i) \cdot (E_i E_j + E_j E_i) \right].$$

$$\begin{aligned} K(E_i, E_j) &= \frac{1}{4} \text{trace} \left[ 4E_i E_i E_j E_j - E_i E_j E_j^t E_i^t - E_i E_j E_i^t E_j^t \right. \\ &\quad \left. - E_j E_i E_j^t E_i^t - E_j E_i E_i^t E_j^t \right] \\ &= \frac{1}{4} \text{trace} \left[ 4E_i E_i E_j E_j - E_i E_i E_j E_j - E_i E_j E_i E_j \right. \\ &\quad \left. - E_i E_j E_i E_j - E_i E_i E_j E_j \right], \end{aligned}$$

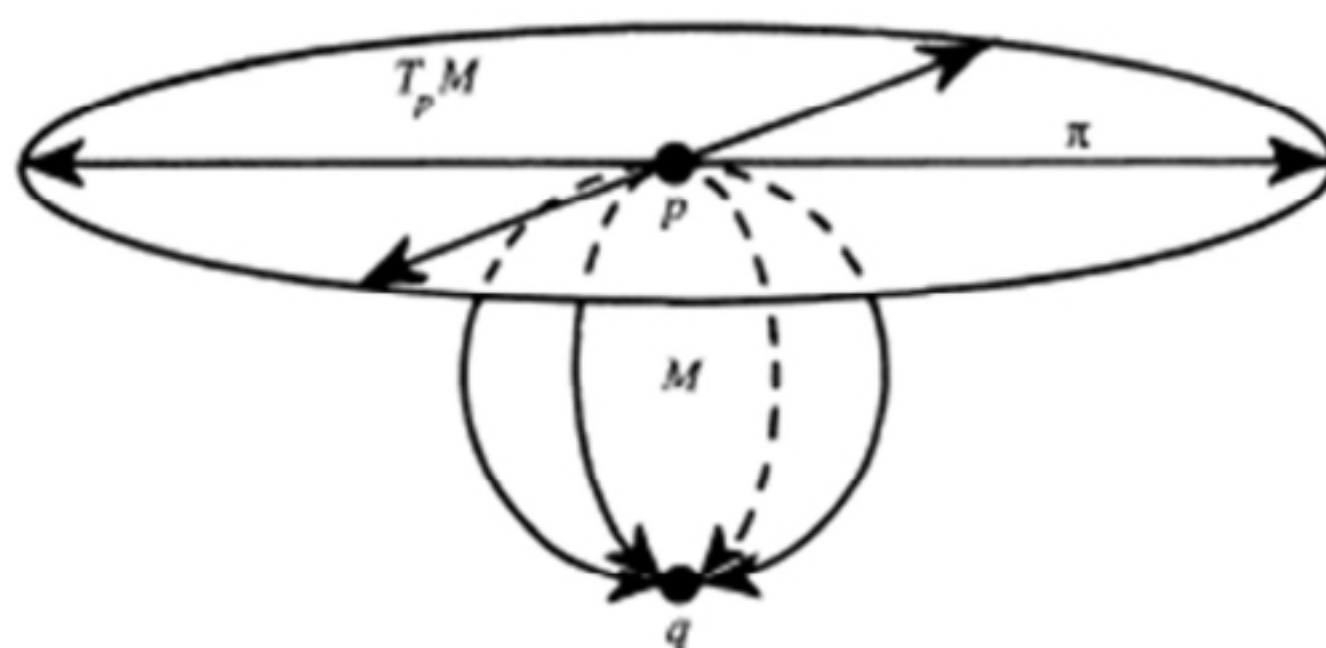
بالتالى فإنَّ

حيث  $[E_i, E_j]$  يشير إلى أن الأقواس تعطي  $E_i E_j - E_j E_i$ . وبالتالي فإن

$$K(E_i, E_j) = \frac{1}{4} [E_i, E_j]^2.$$

في الواقع، في أي زمرة لي متراسة، يكون المتجهان المتعامدان  $v, w$

$$K(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{4} \|\mathbf{v}, \mathbf{w}\|^2$$



الشكل (٤, ٩). في الكرة  $M$ ، يحدد التطبيق الأسّي  $\text{Exp}_p$  قرصاً مفتوحاً متشابهاً تفاضلياً على  $M - \{q\}$ ، ويحدد الدائرة الحدية بتنامها على  $\{q\}$ . تُسمى النقطة المنفردة  $q$  للتطبيق الأسّي  $\text{Exp}_p$  نقطة مرافقة.



(راجع [Milnor] Milnor، الصفحة ٣٢٣، أو [Helgason] Helgason، التمرين الثاني. أ.٦ (الرابع)

والرابع. أ.٢ (الثاني)). وعلى سبيل المثال، بالنسبة لـ  $SO(3)$ ، خذ

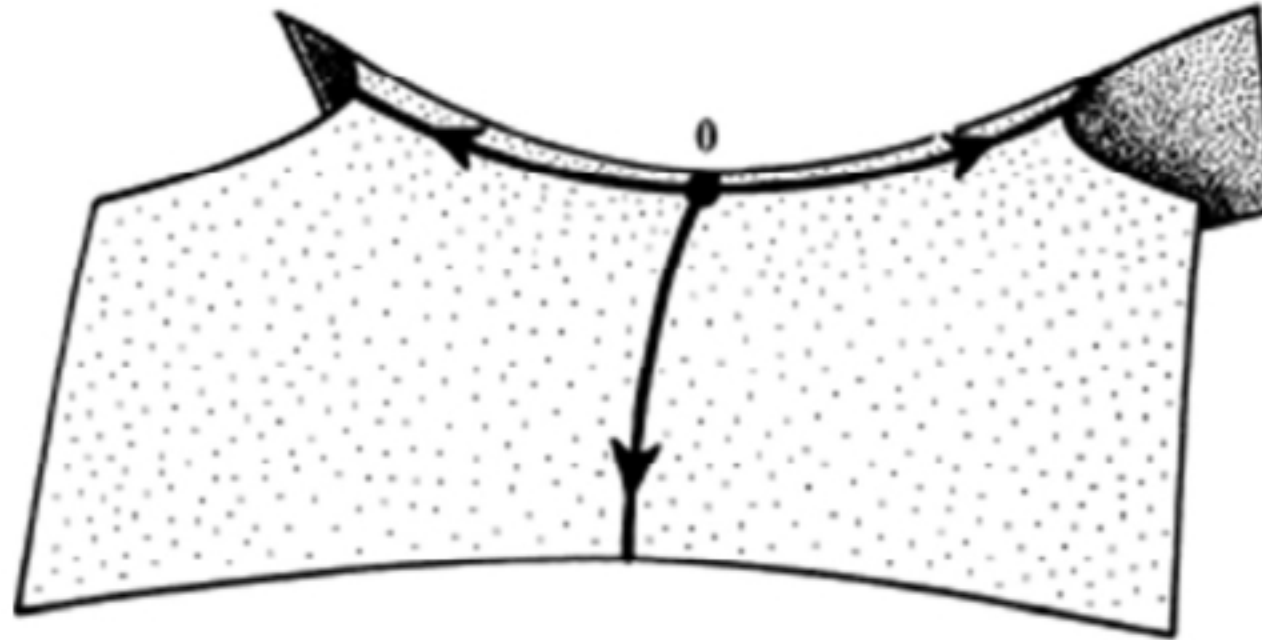
$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

عندئذٍ

$$\begin{aligned} K(E_1, E_2) &= \frac{1}{4} \|[E_1, E_2]\|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left\| \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \right\|^2 = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$



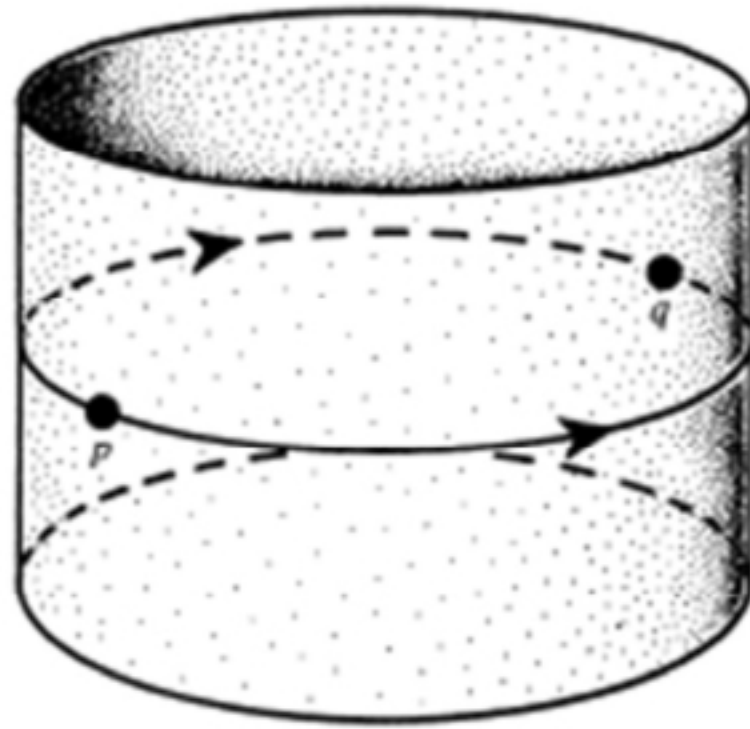
الشكل (٥، ٩). بالنسبة للسر  $\{z = x^2 + y^2\}$ ، يكون التطبيق الأسّي  $\text{Exp}_0$  تماثلاً تفاضلياً عمومياً.

تتحول جميع التقوسات المقطعية إلى  $\frac{1}{8}$ . حيث إنَّ  $SO(3) = RP^3$  كرة ثلاثية الأبعاد مدوّرة نصف قطرها  $2\sqrt{2}$  ونقاطها المتقابلة محددة. بالنسبة لـ  $SO(n)$ ،  $0 \leq K \leq \frac{1}{8}$ .

### (٩, ٣) النقاط المرافقة وحقول جاكوبي

على الرغم من أن التطبيق الأسّي  $\text{Exp}_p$  تماثل تفاضلي عند  $0$ ، إلا أنه لا ينبغي أن يكون تماثلاً تفاضلياً في جميع النقاط  $v \in T_p M$ . فإذا كان لدينا  $M$  كرة الوحدة و  $p$  القطب الشمالي عندها يحدد التطبيق الأسّي  $\text{Exp}_p$  القرص  $\{v \in T_p M : |v| < \pi\}$  المتماثل تفاضلياً على  $M - \{q\}$ ، حيث  $q$  هو القطب الجنوبي، إلا أنه يحدد الدائرة بتمامها  $\{|v| = \pi\}$  على  $\{q\}$ . (كما هو موضح في الشكل ٩, ٤). ومن جهةٍ أخرى، بالنسبة للسرّج  $\{z = x^2 + y^2\}$  في الشكل ٩, ٥، يكون التطبيق الأسّي  $\text{Exp}_0$  تماثلاً تفاضلياً عمومياً.

تُسمى النقطة  $q = \text{Exp}_p v \in M$  مرافقة للنقطة  $p$  إذا لم يكن التطبيق الأسّي  $\text{Exp}_p$  تماثلاً تفاضلياً عند  $v$ ، أي إذا كان التطبيق الخطّي  $D\text{Exp}_p v$  منفرداً. يحدث ذلك عندما يتطابق عمودٌ متحرك نحو  $v$  عند  $v \in T_p M$  بحيث تكون السرعة صفراً عند  $q \in M$ ، أو تقريباً عندما تصبح بؤرة الجيوديسي قريبة من  $p$  على  $q$ . تتميز هذه النقاط المرافقة  $q$  بحقل المتجهات "جاكوبي"  $J$  على طول الجيوديسي، وينعدم عند النقطتين  $p$  و  $q$ ، وهو ما يوفر السرعة الأولية لإيجاد الجيوديسي القريبة (راجع Spiivak [Spi]، المجلد الرابع، الفصل الثامن).



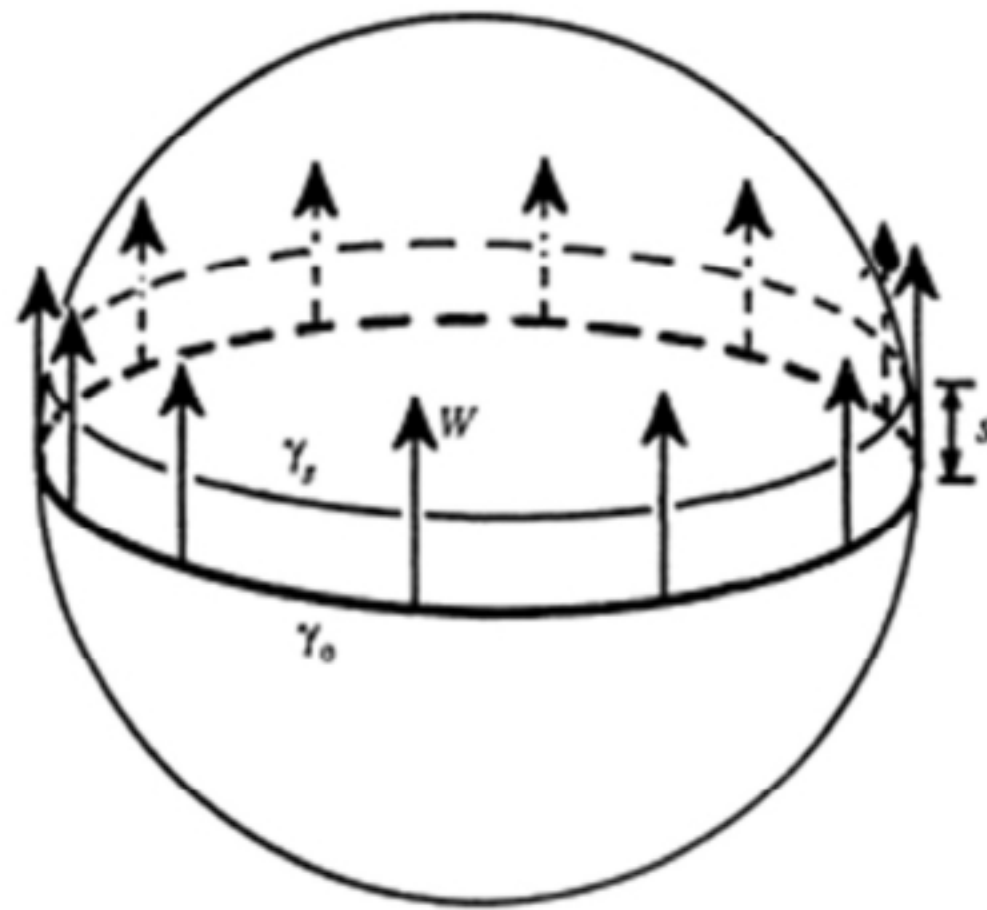
الشكل (٩, ٦). لن تكون الجيوديسي على الأسطوانة الناشئة عند النقطة  $p$  المسارات الأقصر عند النقطة الفاصلة  $q$ .

ملاحظة: اتضح أنه عندما يمر الجيوديسي بنقطة مرافقة فإنه لا يبقى الجيوديسي الأقصر من النقطة  $p$ . نقدم النظرية التالية كمثال مبكر للعلاقة بين التقوس والنقاط المرافقة (راجع Cheeger و Ebin [Chel], نظرية روش Rauch's Theorem ٢٨, ١).

النظرية: ليكن  $M$  منطوياً ريمانياً ناعماً. إذا كان التقوس المقطعي  $K$  عند كل نقطة لكل مقطع محدوداً من الأعلى بـ  $K_0$  ثابت، عندها تكون المسافة من أي نقطة إلى نقطة مرافقة على الأقل  $\pi/\sqrt{K_0}$ . وعلى وجه الخصوص، إذا كان التقوس المقطعي  $K$  غير موجب، فليس هناك نقاط مرافقة، ويكون التطبيق الأسّي  $\text{Exp}_p$ ، تماثلاً تفاضلياً (محلياً) عند كل نقطة. (عند ذلك نقول إنَّ التطبيق الأسّي  $\text{Exp}_p$ ، تطبيق غمر أو تطبيق غطائي).

#### (٩, ٤) النقاط الفاصلة ونصف قطر التباين

إنَّ النقطة الفاصلة هي آخر نقطة على الجيوديسي من النقطة  $p$  إلى حيث يبقى الجيوديسي المسار الأقصر من  $p$ . قد تكون النقطة الفاصلة  $q$  مرافقة للنقطة  $p$ ، باعتبار النقطة المتقابلة قطرياً على الكرة، حيث يتبؤر الجيوديسي القريبة جداً (كما هو موضح في الملاحظة أعلاه). وكبديل لذلك، قد تكون النقطة الفاصلة  $q$  مثل النقطة المتقابلة قطرياً على الأسطوانة المبينة في الشكل ٦, ٩، حيث تلتقي الجيوديسي المتجهة في اتجاهات معاكسة من النقطة  $p$ .



الشكل (٩, ٧). إنَّ التغير الثاني لطول خط الاستواء هو  $L''(0) = -\int K(T, W) = -2\pi$ .

داخل محل هندسي لنقاط الفاصلة، يكون التطبيق الأسّي  $\exp p$  متبايناً ومتماثلاً تفاضلياً. يُسمى الحد الأدنى للمسافات من أي نقطة إلى النقطة الفاصلة نصف قطر التباين المنطوي. على سبيل المثال، إن نصف قطر التباين لأسطوانة نصف قطرها  $\alpha$  هو  $\pi\alpha$ . إن إحاطة التقوس المقطعي لا يبعد نصف قطر التباين عن 0. قد يكون لأسطوانة ذات تقوس جاوس 0، بحيث يكون اختيارنا لنصف قطر الأسطوانة ونصف قطر التباين صغيراً. وعلى نحوٍ مماثل، قد يكون للمنطويات الزائدية ذات التقوس السلبي نصف قطر تباين صغير. إن الفرضية العامة للنظريات العمومية هي الهندسة المحدودة: التقوس المقطعي محدود من الأعلى ونصف قطر التباين محدود من الأسفل.

#### (٩, ٥) نظرية بونيه

تتوصل نظرية بونيه إلى استنتاج عمومي من فرضية التقوس المحلية: ليكن  $M$  منطوياً ريمانياً (متصلاً) ناعماً ذا تقوس مقطعي محدود من الأسفل بـ  $K_0$  ثابت موجب. عندها يكون قطر الدائرة بالنسبة لـ  $M$  على الأكثر  $\pi/\sqrt{K_0}$ . إن قطر الدائرة بالنسبة لـ  $M$  هي المسافة الأكبر بين أي نقطتين. تبين كرة الوحدة التي يكون فيها  $K=1$  وقطر الدائرة  $\pi$  (تُقاس المسافة على الكرة) أن نظرية بونيه دقيقة (حادة). نقدّم الآن مخططاً أو مسودة للبرهان تبدأ بثلاث تمهيدات. تربط التمهيدية الأولى التغير الثاني لطول الجيويسي بالتقوس المقطعي  $K$ .

تمهيدية: ليكن  $\gamma$  جزءاً محدوداً لجيويسي ذا مماس الوحدة  $T$ . ليكن  $W$  حقل متجهات متعامداً ومتوازياً ومتبايناً على  $\gamma$ . عندها نحصل على التغير الثاني الأولي للطول من العلاقة

$$L''(0) = -\int K(T, W). \quad (٩, ١)$$

على سبيل المثال، ليكن  $\gamma$  خط الاستواء على كرة الوحدة المبيّنة في الشكل ٩, ٧. وليكن  $W$  حقل متجهات الوحدة العلوي. عندها تكون دائرة خط العرض  $\gamma_s$  مسافة  $s$  من  $\gamma$  ويكون طولها  $L(s) = 2\pi \cos s$ . بالتالي فإن

$$L''(0) = -2\pi = -\int K,$$

باعتبار  $K=1$ .

تفسّر هذه التمهيدية ملاحظتنا المقدمة في (الباب ٧, ٦)، حيث إن التقوس الموجب يعني أن الجيوديسي المتوازية الموجبة تتقارب (وبالتالي تنقص المسافة المقطعية).

لاحظ أنه بالقياس في حقل المتجهات المتباين  $aW$  بطول  $a$ ،

$$(9, 2) \quad L''(0) = \int -a^2 K(T, W).$$

تبحث التمهيدية الثانية في حقول المتجهات المتباينة لطول المتغير.

تمهيدية: ليكن  $\gamma$  قطعة أولية لمحور  $x$  في  $\mathbb{R}^2$  بطول  $L(0)$ . ففي حقل المتجهات العمودي المتباين الناعم يكون  $f(x)$  عندها نحصل على تغير الطول الثاني الأولي من العلاقة

$$(9, 3) \quad L''(0) = \int_0^{L(0)} f'(x)^2 dx.$$

البرهان: باتباع  $f(x)$  نحصل على منحنى بطول

$$\begin{aligned} L(s) &= \int_0^{L(0)} [1 + s^2 f'(x)^2]^{1/2} dx \\ &= \int_0^{L(0)} [1 + \frac{1}{2} s^2 f'(x)^2 + \dots] dx. \end{aligned}$$

وبإجراء التفاضل نحصل على التمهيدية (9, 3).

نذكر التمهيدية الثالثة بدون برهان إضافي نتيجة جمع نتيجتي التمهيديتين (9, 2) و (9, 3).

تمهيدية: ليكن  $\gamma$  جزءاً محدوداً لـ جيوديسي ذا مماس الوحدة  $T$ . وفي حقل متجهات متباين  $fW$  حيث  $W$  حقل متجهات متعامد ومتواز ومتباين على  $\gamma$ . فنحصل على التغير الثاني الأولي للطول من العلاقة

$$(9, 4) \quad L''(0) = \int_{\gamma} [f'^2 - f^2 K(T, W)].$$

برهان نظرية بونيه: على افتراض أن قطر الدائرة  $M$  هو أكبر من  $\pi / \sqrt{K_0}$ . عندئذ يكون هناك

الجيوديسي الأقصر  $\gamma(t)$  لطول  $\pi / \sqrt{K_0} < l$ . وبالتالي يكون  $K \geq K_0 > \pi^2 / l^2$ .

على افتراض أن  $\gamma$  متوسط بطول القوس  $t$ . ليكن  $W$  حقل متجهات الوحدة المتعامد المتوازي على  $\gamma$ . من المعادلة (٤, ٩)، نحصل على التغير الثاني الأولي للطول من العلاقة:

$$L''(0) = \int_0^l \left( \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi}{l} t \right)^2 - \left( \sin^2 \frac{\pi}{l} t \right) K(T, W) \\ < \int_0^l \frac{\pi^2}{l^2} \cos^2 \frac{\pi}{l} t - \frac{\pi^2}{l^2} \sin^2 \frac{\pi}{l} t = 0.$$

التناقض في اختيار  $\gamma$  المسار الأقصر يكمل البرهان.

ملاحظة: في برهان نظرية بونيه، كان من الممكن أن نختار أي متجه وحدة متعامد على  $T$  بالنسبة لـ  $W$  عند نقطة البداية في  $\gamma$  (تمديد  $W$  من خلال الانتقال المتوازي). يتيح لنا توسيط جميع هذه الخيارات استبدال الحد على المتوسط بالحد على  $K$  تقوس ريتشي. تستنتج نظرية مايرز إلى أنه إذا كان  $\text{Ric} \geq (n-1)K_0$ ، عندها يكون قطر الدائرة  $M \leq \pi / \sqrt{K_0}$ .

#### (٩, ٦) نظرية مايرز (Myers) [Mye]

تُضعف هذه النظرية فرضية نظرية بونيه من التقوس المقطعي إلى تقوس ريتشي: ليكن  $M$  منطوياً ريمانياً ناعماً (تاماً، ومتصلاً) ذا تقوس ريتشي المحدود من الأسفل بـ  $n-1$ . عندها يكون قطر دائرة  $M$  على الأكبر  $\pi$ .

البرهان: في برهان نظرية بونيه، كان من الممكن أن نختار أي متجه وحدة متعامد على  $T$  بالنسبة لـ  $W$  عند نقطة البداية  $\gamma$  (تمديد  $W$  من خلال الانتقال المتوازي). يتيح لنا توسيط جميع هذه الخيارات استبدال الحد على المتوسط بالحد على  $K$  تقوس ريتشي (مقسماً على  $n-1$ ). في العبارة التي قمنا فيها بمُعير  $K_0 = 1$  فقط للراحة. من المؤكد أنه إذا كان التقوس المقطعي على الأقل 1، فإن تقوس ريتشي على الأقل  $n-1$ .

ملاحظة: نستنتج أنه لا يوجد في  $M$  حجم أكثر من كرة الوحدة، والذي يمكن إثباته مباشرةً (نظرية Bishop's [Cha. Thm. ٩, ٣]). من جهةٍ أخرى، يعطي Berger (راجع [Che])، المثال (٣, ٣٥) أمثلة على ثلاث كرات ذوات تقوس مقطعي موجب محدود وحجم صغير. أو بتقوس وحجم يؤول إلى صفر إذا أردت.



نذكر بعض النتائج ذات الصلة.

### (٩, ٧) نظرية القطر الأعظمية لتشينغ [Che2] Cheng's

إذا كان قطر الدائرة المبتين في ٩-٦ يساوي  $\pi$ ، عندها يكون  $M$  كرة مدوّرة.  
ملاحظات: إذا كان التقوس المقطعي  $K \geq 1$  وتجاوز قطر الدائرة  $\pi/2$ ، عندئذ يكون  $M$  كرة طوبولوجية (Berger [Ber2])، مع برهان أسهل قدمه كلٌّ من Grove and Shiohama [Gro2]. إنّ الفضاءات الإسقاطية القياسية المتنوعة  $RP^2$ ،  $CP^n$ ،  $HP^n$ ، و  $CaP^2$  جميعها تتضمن  $1 \leq K \leq 4$  وقطر الدائرة  $\pi/2$ .

### (٩, ٨) التقوس الثابت

في منطو ريماني  $M$  ناعم وتام ومتصل. وعلى افتراض أن  $M$  بسيط الاتصال، بحيث تنكمش كل عروة وتصبح نقطة. وعلى افتراض أن التقوس المقطعي  $K$  ثابت بالنسبة لجميع المقاطع في جميع النقاط. بالقياس، قد نفترض أن  $K$  هي 1, 0 أو -1.  
إذا كان  $K = 1$ ، عندها يكون  $M$  كرة الوحدة المدوّرة. إذا كان  $K = 0$ ، عندها يكون  $M$  فضاء إقليديس. إذا كان  $K = -1$ ، عندها يكون  $M$  فضاءاً زائدياً. وبالتالي يتحدّد المقياس والهندسة العمومية تماماً بالنسبة للمنطويات بسيطة الاتصال للتقوس الثابت.

### (٩, ٩) نظرية الكرة

ليكن  $M$  منطوياً ريمانياً ناعماً وتاماً و بسيط الاتصال، ويكون تقوسه المقطعي  $1/4 < K \leq 1$ . عندها تكون  $M$  كرة طوبولوجية (متماثلة اتصالياً بالكرة المدوّرة).  
ملاحظات: برهن H. Rauch [Rau] عام ١٩٥١ م نظرية الكرة بالنسبة لـ  $3/4 \leq K \leq 1$ ، وبرهن M. Berger [Ber1] و W. Klingenberg [Kli] عام ١٩٦٠ م نظرية الكرة بالنسبة لـ  $1/4 < K \leq 1$ .

### (٩, ١٠) نظريات الشطيرة الأخرى

تعدُّ نظرية الكرة مثلاً لنظرية الشطيرة، مع الفرضية التي تقول إنّ التقوس "مشطور" أو (محصور) بين قيمتين. هناك نظريتان أُخريان للشطيرة عن هذه المنطويات بسيطة الاتصال:

إذا كان  $1/4 \leq K \leq 1$  ، عندها يكون  $M$  متماثلاً اتصالياً بكرة مدوّرة أو متقايساً مع أحد الفضاءات الإسقاطية القياسية الأربعة المتنوعة  $\mathbb{R}P^2, \mathbb{C}P^n, \mathbb{H}P^n, \mathbb{C}aP^2$  (Berger [Ber1]).

إذا كان  $0.654 \leq K \leq 1$  (ليس دقيقاً)، عندها يكون  $M$  متماثلاً تفاضلياً للكرة المدوّرة (Suyama [Suy]).

#### (٩, ١١) نظرية مقارنة روش

ليكن  $M_1, M_2$  منطويين ريمانيين تآمين وناعمين وتكون تقوساتها المقطعية  $K_1 \geq K_0 \geq K_2$  بالنسبة لـ  $K_0$  ثابتة. حيث  $p_1 \in M_1, p_2 \in M_2$  يحدد  $T = T_{p_1}M_1 = T_{p_2}M_2$  عبر التقايس الخطي. ليكن  $B$  كرة مفتوحة حوالي  $0$  في  $T$  التي يكون عليها التطبيق الأسّي  $\text{Exp}_{p_1}$  و  $\text{Exp}_{p_2}$  تماثلين تفاضليين في  $M_1$  و  $M_2$ . ليكن  $\gamma$  منحنى في  $B$  وليكن  $\gamma_1, \gamma_2$  صورها في  $M_1$  و  $M_2$ . عندها يكون طول  $(\gamma_1) \geq$  طول  $(\gamma_2)$ .

في التطبيقات، عادةً ما يُؤخذ  $M_1$  أو  $M_2$  على أنه كرة، أو فضاء إقليديس، أو فضاء زائدي، وجميعها تحتوي على مثلثات معروفة. وبالتالي، يمكن التوصل إلى تقديرات المسافة على المنطوي الآخر من حدود التقوس.

تُنسب نظرية المقارنة المهمة والقوية إلى Toponogov.

#### (٩, ١٢) مسألة متساوي المحيط

تبحث مسألة متساوي المحيط المعيارية في أقصر منحنى مغلق بسيط يحيط بمساحة منطقة محددة في سطح ريمان. (اشتقّ الاسم غالباً من المسألة المتعلقة بالبحث عن أكبر مساحة مُحاطة بمنحنيات التي تكافؤ المحيط.) تصف الدراسة المهمة التي أجراها Hutchings، Morgan و [How]. مقدمة. الباب الثامن] النظرية الجديدة التالية التي تعود إلى Benjamini و Cao [Ben، النظريتين الخامسة والسادسة]. اللذان قدما البرهان الأول الذي يفيد أنّ حل متساوي المحيط في مجسم قطع مكافئ يكون دورانه دائرة أفقية.

$$P = \{z = x^2 + y^2\} \subset \mathbb{R}^3$$



يُعدُّ وجود أقصر منحنى مسألة مهمة. في سطح متراص، ربما ذي حد، تعطي خصائص التراص لدوال Lipschitz عامل تقليص. يبيّن الجدل الجديد بين Hass و Morgan [Has] أنه بعيداً عن الحد، يكون عامل التقليص هو طمر منحنى لتقوس جيوديسي ثابت  $K_0$ ، باستثناء العديد من أقواس جيوديسي أو النقاط المعزولة حيث يصطدم بذاته إلا أنه يبقى  $C^1$ . إذا أتاح أحد العديد من المركّبات المحيطة بمناطق منفصلة، فيكون تقوس جيوديسي  $K \leq K_0$  في كل مكان.

عند التوصل إلى هذا الوجود والانتظام، يمكن بسهولة برهنة نظرية متساوي المحيط التالية. نظرية ([How]، الباب التاسع). [Pan]، الفرضية السابعة). [Top]. في مستوى مقياس ناعم وتام ومتماثل دورانياً بحيث يكون تقوس جاوس دالة متناقصة قطعاً للمسافة من نقطة الأصل. عندها يكون المنحنى المغلق البسيط لتقليل الطول الوحيد المحيط بمساحة محددة هو دائرة مركزها نقطة الأصل. برهان النظرية: في داخل كرة كبيرة، يكون فيها  $m_0$  كبيراً، وليكن  $L(t)$  يشير إلى طول أقصر منحنى للمركبتين  $m \leq m_0$  المحيطة بالمناطق المنفصلة  $m$  لإجمالي المساحة  $t$ . إذا كان  $L$  قابلاً للاشتقاق عند  $t$ ، عندها يكون  $L'(t)$  تقوس الجيوديسي  $K_0$ . تبين نظرية جاوس وبونيه أن إجمالي تقوس جاوس للمنطقة المغلقة يساوي

$$2\pi\chi - \int K \leq 2\pi - L(t)K_0 = 2\pi - L(t)L'(t).$$

ليكن  $f(t)$  يشير إلى إجمالي تقوس جاوس لمساحة قرص  $t$  يكون مركزه نقطة الأصل. باعتبار أن تقوس جاوس هو دالة متناقصة لنصف القطر، فلا بد أن يكون لأي منطقة أخرى بذات المساحة، تقوس جاوس بإجمالي أقل. لذا يكون لدينا ما يلي

$$2\pi - L(t)L'(t) \leq f(t), \quad L(t)L'(t) \geq 2\pi - f(t).$$

ينتج عن التكامل من  $t = 0$  إلى  $T$  ما يلي

$$L(t)^2 \geq 2 \int L(t)L'(t) \geq 4\pi T - 2 \int f(t).$$

إنَّ هذه المتباينة حادة بالنسبة لدائرة يكون مركزها نقطة الأصل (كما يبينه تكامل صيغة جاوس وبونيه بالنسبة للدوائر التي يكون مركزها نقطة الأصل ومساحتها  $t$  من 0 إلى  $T$ ) وقطعياً ما عدا ذلك.

لقد درست المجموعة الهندسية "SMALL" لأبحاث الجامعيين في كلية ويليامز Williams [Cot] المناطق متساوية المحيط على سطوح غير ناعمة، مثل سطح علبة أسطوانية. بالنسبة لمساحة صغيرة، وعلى سبيل المثال، تفضّل النقطة تداخل الحافة على تلامس الرأس أو الجوانب.

## الفصل العاشر

### المعيار العام

في الطبيعة، غالباً ما تعتمد طاقة مسار أو سطح على الاتجاه، وكذلك على الطول أو المساحة. فعلى سبيل المثال، تعتمد طاقة سطح البلور جذرياً على الاتجاه. في الواقع إنَّ بعض الاتجاهات رخيصة جداً بحيث إن معظم البلورات لا تستخدم إلا بعض الاتجاهات الرخيصة. (كما هو موضح في الشكل ١، ١٠). يُطبَّق هذا الفصل التكاليف أو المعايير  $\Phi$  الأكثر عمومية على المنحنيات ويعرض تعميماً مناسباً للتقوس.

#### (١٠، ١) المعيار

إنَّ المعيار  $\Phi$  على  $\mathbb{R}^n$  هو دالة محدّبة متجانسة على  $\mathbb{R}^n$ ، موجبة إلا إذا كان  $\Phi(0) = 0$ . نسمي  $\Phi C^k$  إذا كان مقيّداً بـ  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  هو  $C^k$  (أو إذا كان مقيّداً بكرة الوحدة  $S^{n-1}$ ، فهو  $C^k$ ). حيث يكفي تحدّب المعيار  $\Phi$  تحدّب كرة الوحدة الخاصة به

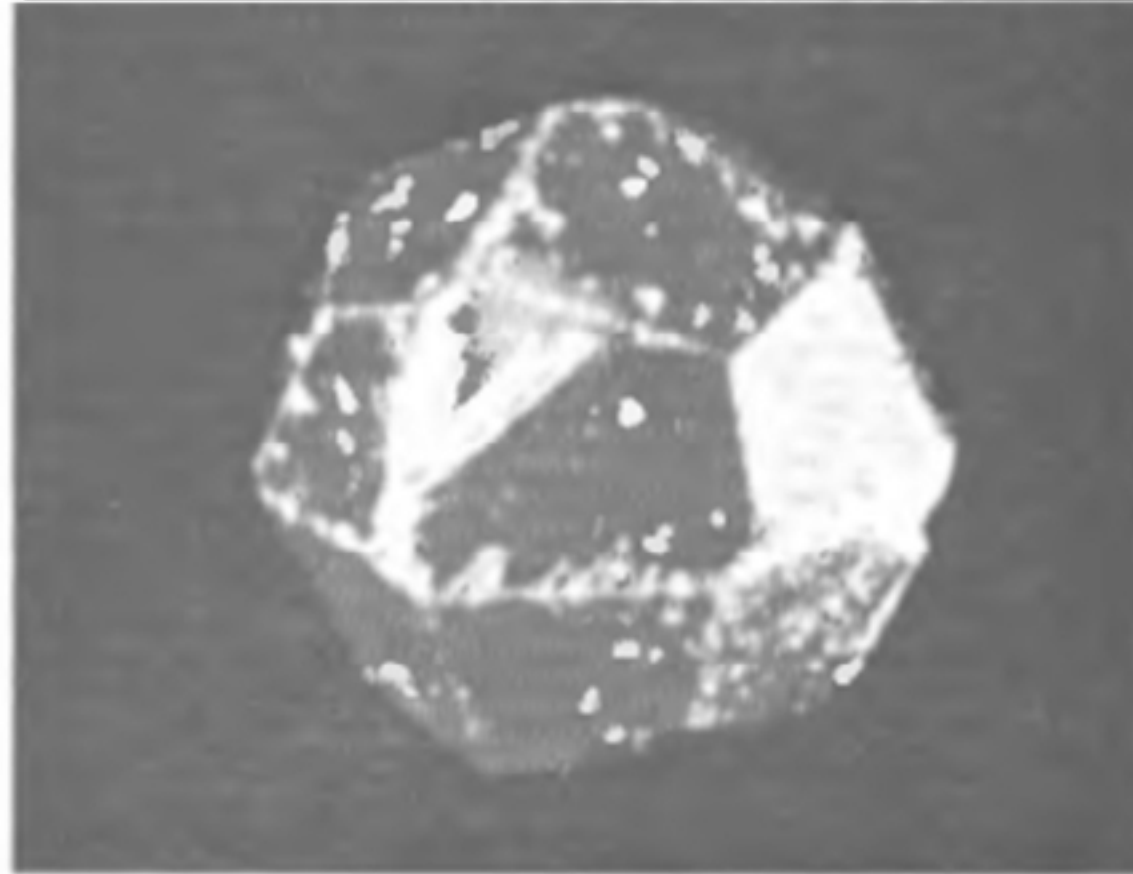
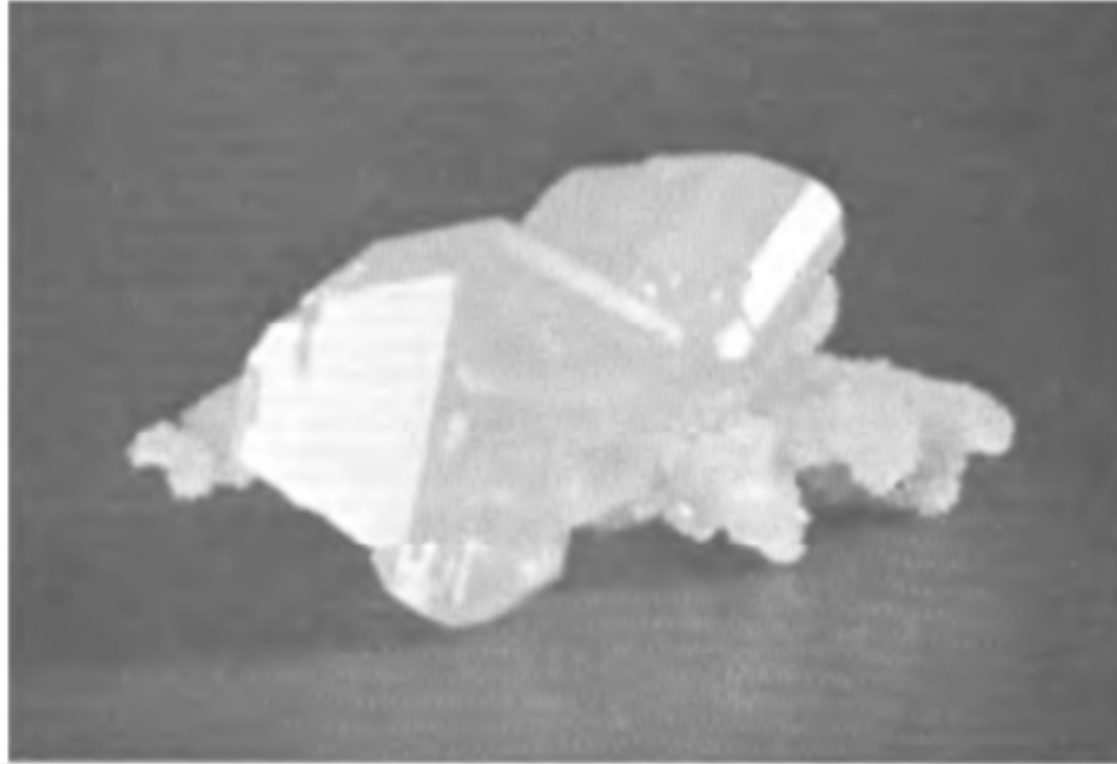
$$\{x : \Phi(x) \leq 1\}.$$

إنَّ أي منحنى  $C$ ، معلّم بتطبيق قابل للاشتقاق  $\gamma : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  يحدد

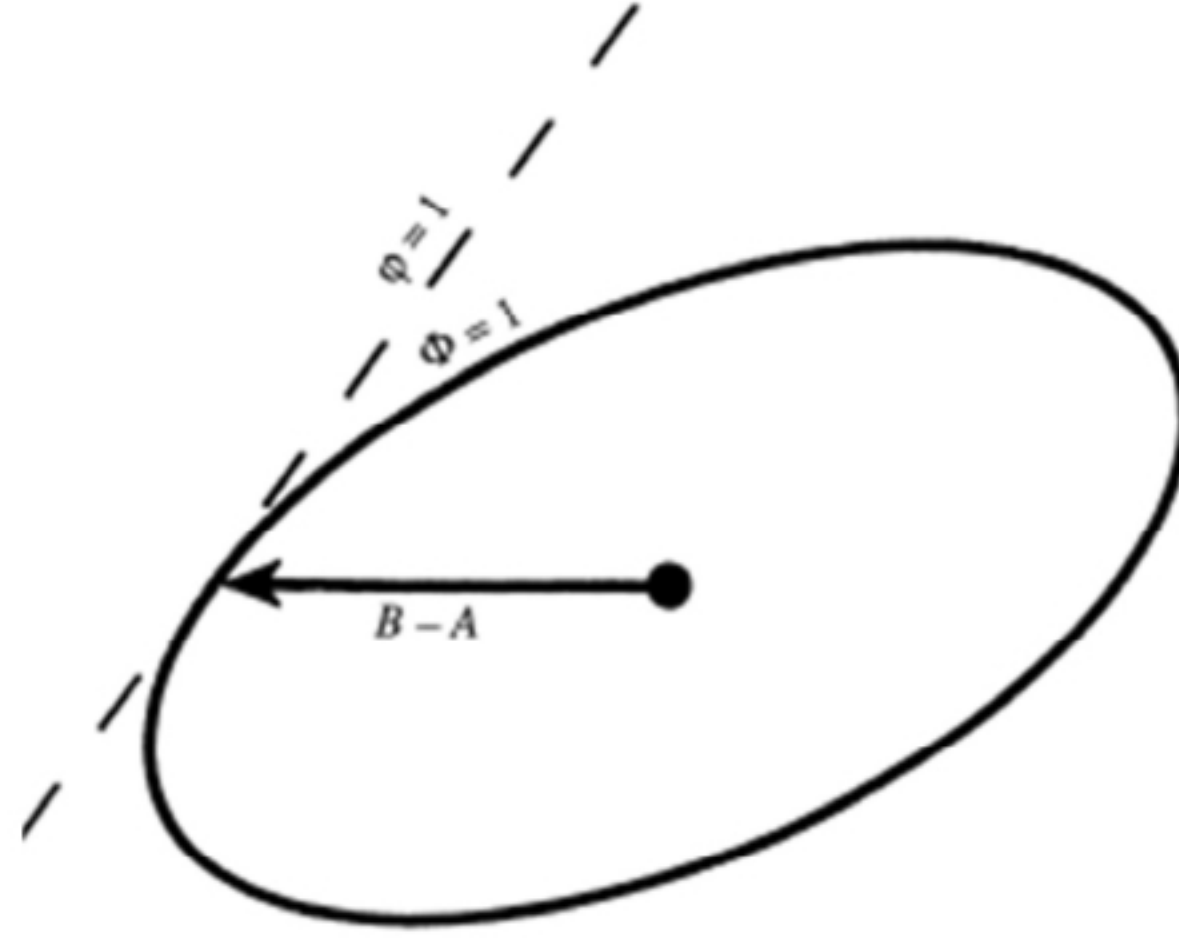
$$\Phi(C) = \int_C \Phi(T) ds = \int_{[0,1]} \Phi(\dot{\gamma}) dt.$$

إذا كان  $C$  قطعة مستقيمة، عندئذٍ يكون

$$\Phi(C) = \Phi(T) \text{ length } C.$$



الشكل (١, ١٠). أشكال بلورية يوجد فيها العديد من الجوانب التي تتطابق مع اتجاه السطح ذي الطاقة المنخفضة. (إنَّ أول صورتين مأخوذتين من *Beautiful Crystals Calender* لـ Steve Smale's. أما الصورة الثالثة فهي مأخوذة من E. Brieskorn . وتظهر الصور الثلاث في *The Parsimonious Universe* لكاتبه S. Hildebrandt و A. Tromba (Hi)). الصفحتان ٢٦٣ و ٢٦٤].



الشكل (١٠, ٢). باعتبار أن كرة الوحدة للمعيار  $\Phi$  محدبة تماماً، فهناك دالة خطية أو شكل واحد  $\varphi$  مثل  $\varphi(v) \leq \Phi(v)$  ذو تكافؤ فقط إذا كان  $v = B - A$ .

### (١٠, ٢) الفرضية

من بين جميع المنحنيات القابلة للاشتقاق  $C$  من  $A$  إلى  $B$ ، فالخط المستقيم  $L$  يقلل من المعيار  $\Phi(C)$ ، إذا كان المعيار  $\Phi$  محدباً تماماً.

البرهان: باعتبار أن كرة الوحدة للمعيار  $\Phi$  محدبة، فهناك شكل تفاضلي لمعامل ثابت  $\varphi$  مثل

$$\varphi(v) \leq \Phi(v)$$

مع تكافؤ عندما يكون  $v = B - A$ . (كما هو موضح في الشكل ١٠, ٢). إذا كان المعيار  $\Phi$  محدباً قطعياً، فإن التكافؤ يتحقق فقط إذا كان  $v$  مضاعفاً لـ  $B - A$ . ليكن  $C'$  أي منحنى قابلاً للاشتقاق من  $A$  إلى  $B$ .

عندئذ يكون

$$\Phi(C') = \int_{C'} \Phi(T) ds \geq \int_{C'} \varphi ds$$

$$= \int_C \varphi ds = \Phi(C)$$

من نظرية ستوكس (Stokes's)،  $C$  هي عامل تصغير المعيار  $\Phi$ . إذا كان المعيار  $\Phi$  محدباً قطعياً، فإن عدم التكافؤ قطعي ما لم يكن  $C'$  خطاً مستقيماً أيضاً من  $A$  إلى  $B$ ، لذا فإن  $C$  هو عامل تصغير بشكل وحيد.

## (١٠، ٣) فرضية

تكون الدالة  $C^2$  المتجانسة غير السالبة للمعيار  $\Phi$  على  $\mathbb{R}^n$  محدبة (على التوالي، محدبة بانتظام) إذا وفقط إذا حققت القيود  $\Phi(\theta)$  للمعيار  $\Phi$  في الدوائر القريبة من نقطة الأصل

$$\Phi''(\theta) + \Phi(\theta) \leq 0 \quad (< 0).$$

البرهان: باعتبار التحذب في كل مستوي عبر  $0$  مكافئ للتحذب، فقد نفترض أن  $n = 2$ . ويُتوصل إلى التقوس  $\kappa$  لأي رسم  $r = f(\theta)$  في الإحداثيات القطبية من العلاقة

$$\kappa = \frac{f'^2 - ff'' + 2f'^2}{(f'^2 + f^2)^{3/2}}.$$

وبالتالي تُوصّل إلى حد التقوس لكرة الوحدة  $r = 1/\Phi(\theta)$  من العلاقة

$$\kappa = \left( \frac{\Phi}{\sqrt{\Phi^2 + \Phi'^2}} \right)^3 (\Phi + \Phi'').$$

تُتبع الفرضية.

## (١٠، ٤) التقوس المعمّم

ليكن  $C$  منحنى  $C^2$  ذا تعليم بطول القوس  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ومنتجة التقوس  $\kappa$ . ليكن  $\Phi$  معيار  $C^2$  في المتغيرين  $\delta f$  المدعومين في  $(0,1)$ . عندها يحقق المتغير الأول

$$\delta \Phi(f) = - \int_{[0,1]} D^2 \Phi(\kappa) \cdot \delta f ds,$$

حيث يمثل  $D^2\Phi$  المشتقة الثانية لقيمة المصفوفة عند متجة مماس الوحدة  $T$ . بشكل خاص، بالنسبة لحالة طول  $(\Phi(x) = L(x) = |x|)$ ،

$$\delta L(f) = - \int_{[0,1]} \kappa \cdot \delta f ds.$$

بصورة عامة، نسمي  $D^2\Phi(\kappa)$  متجة التقوس  $\Phi$  المعمم.

البرهان: باعتبار  $\Phi(f) = \int \Phi(f'(u)) du$  لأي تعليم  $f(u)$ ،

$$\delta \Phi(f) = - \int D^2\Phi(f') \cdot \delta f'(u) du$$

$$= - \int D^2\Phi(f')(f'') \cdot \delta f(u) du$$

من التكامل بالتجزيء. وباعتبار أن تعليم طول القوس الأولي  $f'$  هو متجة مماس الوحدة و  $f''$  هو متجة التقوس  $\kappa$ ، فإنه مبدئياً

$$\delta \Phi(f) = - \int D^2\Phi(\kappa) \cdot \delta f(s) ds$$

ملاحظات: إن  $D^2\Phi(T) = 0$ ، وبالتالي فإن متجة التقوس  $\Phi$  المعمم  $D^2\Phi(\kappa)$  هو ناظمي لـ  $T$ . في  $\mathbb{R}^2$ ، إن  $D^2\Phi(\kappa)$  هو مضاعف لـ  $\kappa$ : إذا كان  $\Phi(v) = |v|h(\theta)$ ، عندها يكون  $D^2\Phi(\kappa) = (h + h'')\kappa$ .

#### (٥, ١٠) مسألة متساوي المحيط

تقول إحدى نظريات متساوي المحيط المعروفة إنه من بين جميع المنحنيات المغلقة  $C$  في  $\mathbb{R}^n$  لطول ثابت، تحد الدائرة معظم المساحة -أي، سطح تصغير المساحة الموجهة  $S$  للمساحة الكبرى. (راجع، على سبيل المثال، [Fed, ٤, ٥, ١٤]). بتعبير آخر، يحقق سطح تصغير المساحة  $S$  ذو الحد  $C$

$$\text{area } S \leq \frac{1}{4\pi} (\text{length } C)^2.$$

عند تحديد معيار محدب  $\Phi$  أو  $\mathbb{R}^n$ ، نبحث عن منحنى مغلق  $C_0$  لتكلفة ثابتة  $\Phi(C_0)$  الذي يحد معظم المساحة، لذا فإن أي سطح تصغير المساحة  $S$  ذي الحد  $C$  يحقق

$$\text{area } S \leq \alpha[\Phi(C)]^2.$$

مع تكافؤ  $C = C_0$ .

تبين طرائق ألمغرن (Almgren's) (راجع Almgren [Alm]، وخصوصاً الباب التاسع) باستخدام نظرية القياس الهندسي، أن منحنى متساوي المحيط الأمثل، موجود.

في المستوي يكون لهذه المنحنيات وصف جميل! ليكن  $\Psi$  دوران  $90^\circ$  درجة للمعيار  $\Phi$ ، لذا

$$\Phi(C) = \int_C \Psi(n),$$

حيث  $n$  هو ناظمي الوحدة الذي توصل إليه من خلال دوران مماس الوحدة  $T$  بمقدار  $90^\circ$  درجة عكس اتجاه عقارب الساعة. يتم تحديد المعيار الثنوي  $\Psi^*$  من خلال

$$\Psi^*(w) = \sup \{v \cdot w : \Psi(v) \leq 1\},$$

لذا فإن  $|v \cdot w| \leq \Psi(v)\Psi(w)$ . إن منحنى متساوي المحيط الأمثل هو حد كرة الوحدة  $\Psi^*$  أو "شكل ولف" (Wulff shape) (راجع Wulff ١٩٠١ [Wul] أو Taylor [Tay1]). اتبع M. Gromov النتيجة العامة لأطروحة H. Brunn's الافتتاحية (راجع Brunn ١٨٨٧ [Bru]). نصمم هنا برهاناً جديداً وقصيراً، استناداً إلى ملخص شوارز (Schwartz)، وفقاً لاستخدام Gromov [Gro] (أو راجع Berger [Ber، ١٢، ١١، ٤]) وفي وقت مبكر من قبل Knothe [kno]. تُطبق ذات النتيجة والبرهان على السطوح الزائدية متساوية المحيط المثلى في جميع الأبعاد.

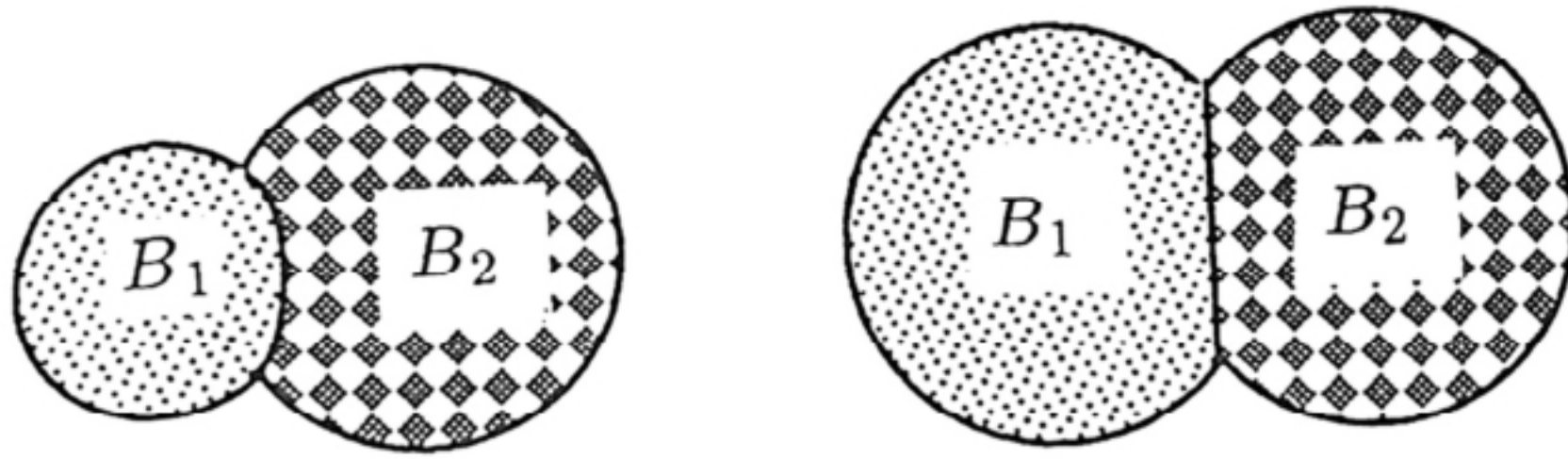
(٦، ١٠) النظرية

ليكن  $\Psi$  معياراً على  $\mathbb{R}^2$ . من بين جميع المنحنيات المحيطة بالمساحة ذاتها، فإن حد كرة  $\Psi^*$  الوحدة  $B$  "شكل ولف" يقلل من  $\int_{\partial B} \Psi(n)$ .



مسودة البرهان: عند النظر في أي منحني مستو يحيط بالمنطقة  $B'$  للمساحة ذاتها كما في  $B$ . ليكن  $f$  تطبيقاً يحافظ على المساحة من  $B'$  إلى  $B$  حاملاً خطوطاً رأسية بشكل خطي إلى خطوط رأسية. عندها يكون  $\det Df = 1$  ويكون  $Df$  مثلثاً:

$$Df = \begin{bmatrix} a & 0 \\ * & b \end{bmatrix}.$$



الشكل (٣، ١٠). أثبت الطلاب الجامعيون أنَّ هاتين "الفقاعتين" توفر طريقة المحيط الأدنى لإحاطة وفصل مساحتين. (Foisy وآخرون [Foi، الشكل ١، ٠، ١]).

باعتبار أن  $\det Df = ab = 1$ ،  $\operatorname{div} f = a + b \geq 2$ ، بالتالي،

$$\Psi(\partial B') = \int_{\partial B'} \Psi(\mathbf{n}) \geq \int_{\partial B'} \Psi(\mathbf{n}) \Psi^*(f) \geq \int_{\partial B'} f \cdot \mathbf{n} = \int_{B'} \operatorname{div} f \geq 2 \operatorname{area} B' = 2 \operatorname{area} B,$$

مع التكافؤ إذا كان  $B' = B$ .

ملاحظات: عند النظر في المتباينات في البرهان، نستعيد نتيجة J. Taylor [Tay2] وهي أن شكل ولف هو عامل التصغير الوحيد بين المجموعات القابلة للقياس (راجع Brothers و Morgan [Bro]). إنَّ متجة التقوس المعمَّم لشكل ولف هو ناظمي الوحدة الداخلي. تثبت الجدلية ذاتها أن سعة شكل ولف داخل مخروط محدَّب هو تصغير المعيار  $\Phi$  بين السطوح المحيطة بالحجم الثابت داخل المخروط.

#### (٧، ١٠) بلورات الملح المضاعفة

تبحث المسألة العنقودية المضاعفة في الطريقة الأرخص وذلك من أجل حصر وفصل منطقتين في المساحات المعروفة. بالنسبة لحالة طول  $(\Phi(x) = |x|)$ ، يكون الحل "فقاعة مضاعفة"



كما هو مبين في الشكل ٣, ١٠، وفقاً لما أثبتته المجموعة الهندسية "SMALL" لأبحاث الجامعيين في كلية ويليامز عام ١٩٩٠م (Foissey وآخرون [Foi]). (للحصول على مزيد من المعلومات، بما في ذلك النتائج الأخيرة في  $\mathbb{R}^3$  وغير ذلك، راجع [Mor4]). بالنسبة لحالة  $\Phi(x+y) = |x| + |y|$  التي يكون فيها شكل ولف (سياج واحد مثالي) مربعاً، تكون الحلول في ثلاثة أنواع مختلفة كما في الشكل ٤, ١٠، وفقاً لما أثبتته المجموعة الهندسية الصغيرة ١٩٩٣م (راجع French وآخرين [Fre]). [Mor8]. تبين صور الميكروسكوب الإلكتروني لملح الطعام (الشكل ٥, ١٠) السلوك النوعي ذاته. إذا تم حسب الوسيط الفاصل، حيث إنه كسر  $0 < \lambda < 1$ ، فإننا نحصل على نتيجة مماثلة، إلا إذا لم يحدث أن  $\lambda < \lambda_0 \approx 0.564$  لنوع الثاني، وفقاً لما أثبتته المجموعة الهندسية "SMALL" لأبحاث الجامعيين ١٩٩٥م (راجع Wecht، و Barber، و Tice [Wec]).

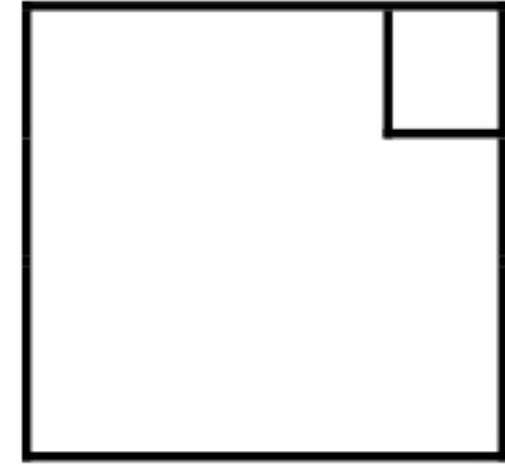
في الأبعاد العامة، إن المنحنيات متساوية المحيط المثالية ليست مفهومة بشكل جيد. إن المرشحين الواضحين أشكال ولف المستوية. تقول النظرية التالية إن المنحنيات متساوية المحيط المثالية ليست مستوية عموماً.



النوع الأول



النوع الثاني

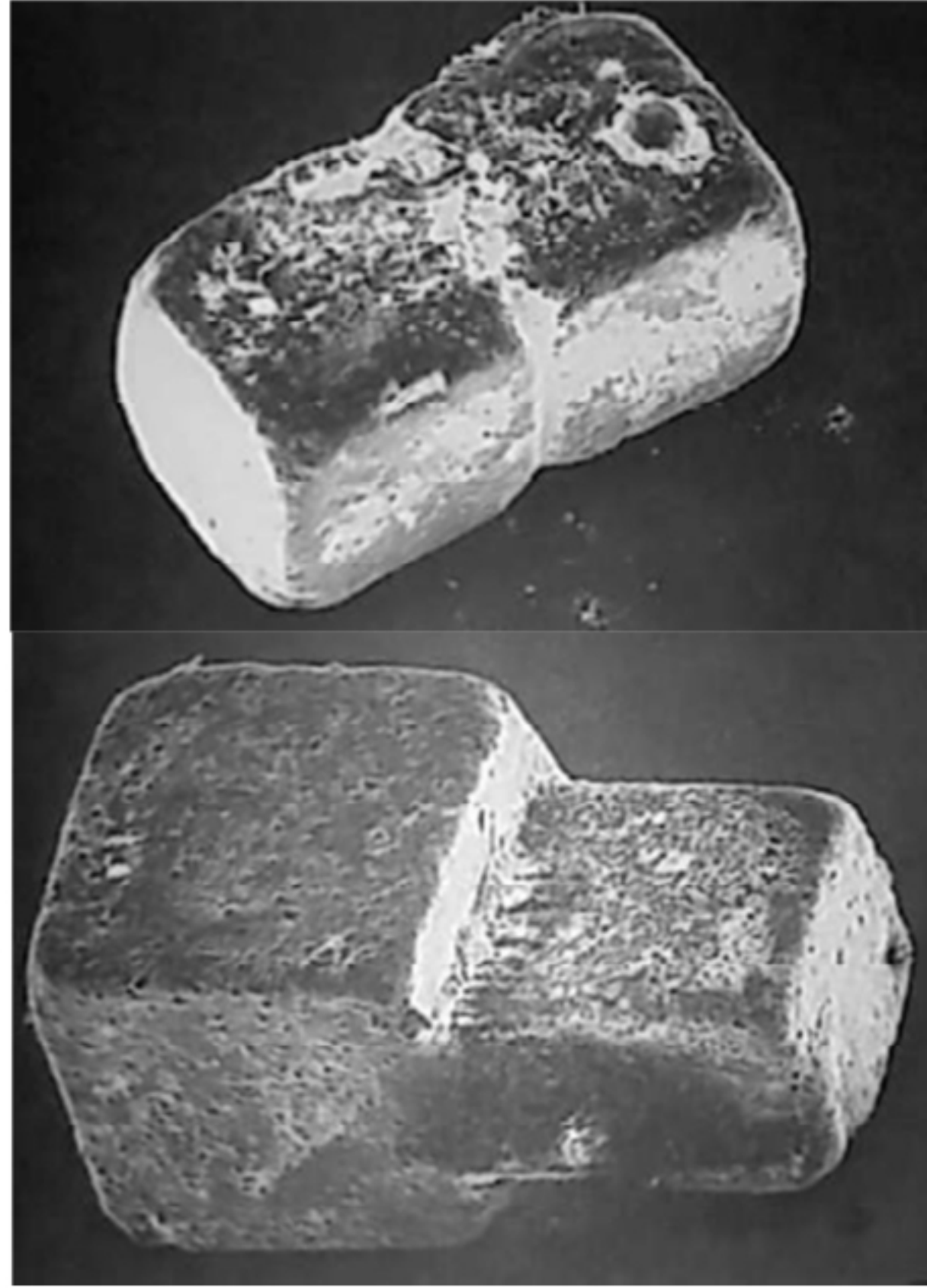


النوع الثالث

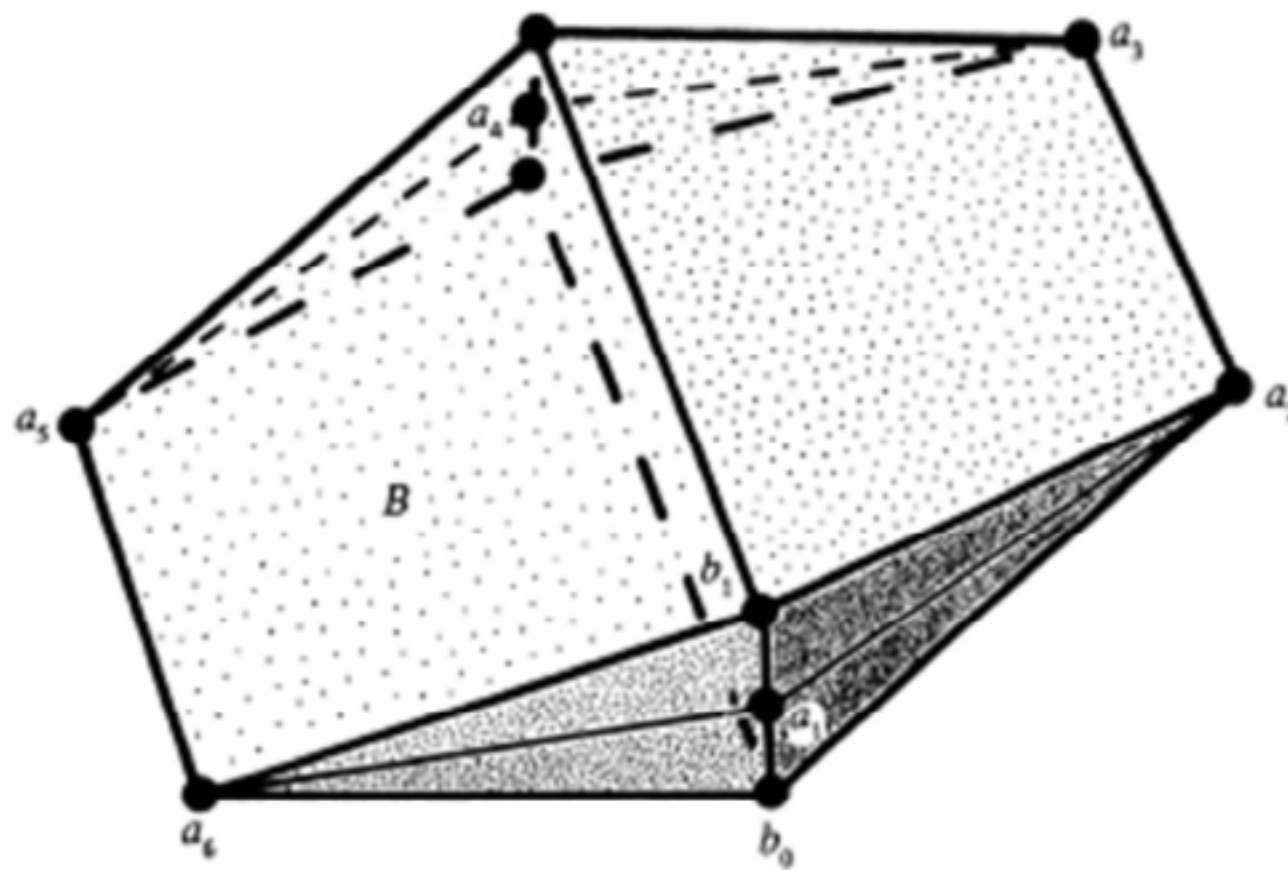
الشكل (٤, ١٠). وجد طلاب هذه الأنواع المختلفة من الكريستال المثالي لنموذجهم الرياضي (French وآخرون [Mor8، الشكل ١]).

### (٨, ١٠) النظرية

بالنسبة للمعايير المحدبة  $\Phi$  في  $\mathbb{R}^3$ ، لا يكون المنحني متساوي المحيط المثالي، مستوياً. البرهان: نعرف المعيار  $\Phi$  من خلال أخذ كرة  $\Phi$  الوحدة لتكون كثيرة وجوه متناظرة مركزياً  $B$  للشكل ٦, ١٠. في أي مستوي  $P$ ، الذي نفسره بأنه المرور عبر نقطة الأصل، يكبر شكل ولف  $S$  ذو الحد  $C$  (مساحة  $(S) / (\Phi(C))^2$ ). سنبين أن هذه النسبة أكبر بالنسبة لمنحني غير مستوي  $C$ .



الشكل (٥, ١٠). تتوافق صور الميكروسكوب الإلكتروني للمح الطعام نوعياً مع توقعات الطلاب (French وآخرون [Mor8], [Fre]).



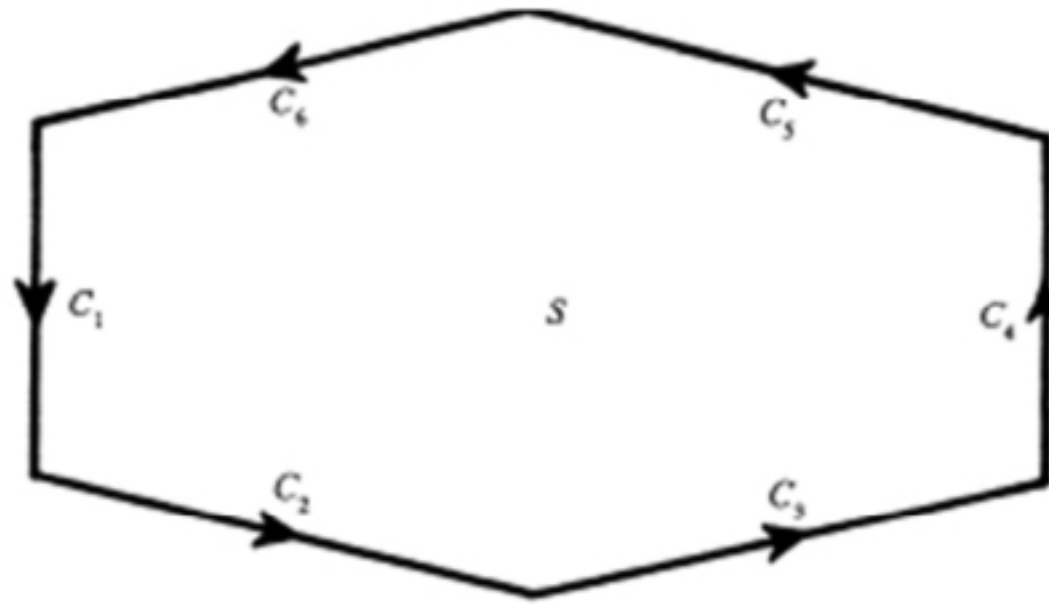
الشكل (٦, ١٠). كرة  $\Phi$  الوحدة  $B$ . إن لكل شريحة  $A$  من المستوي  $P$  عبر نقطة الأصل، رأساً في  $a_1$  أي أنه ليس رأساً في  $B$ .

لا بد أن تكون الشريحة  $A$  لكرة  $\Phi$  الوحدة  $B$  من المستوي  $P$ ، مضلعة. إنَّ رأساً واحداً  $a_1$  على الأقل ليس رأساً في  $B$ . يجب أن يكون الرأس  $a_1$  على ضلع لـ  $B$ ، مع الرؤوس  $b_0, b_1$ . إنَّ شكل ولف  $S$  هو المضلع الثنائي بالنسبة لـ  $A$ ، الذي دار باتجاه عقارب الساعة  $90^\circ$  درجة. (كما هو موضح في الشكل ٧، ١٠). إذا كان  $C_1$  يشير إلى الضلع الثنائي بالنسبة لـ  $a_1$  (الذي يدور  $90^\circ$  درجة)، عندها يشير  $C_1$  إلى اتجاه  $a_1$ . إنَّ مسافتها من نقطة الأصل هي  $1/|a_1|$ .  
ليكن  $C'$  المضلع في  $\mathbb{R}^3$  الذي يُتوصَّل إليه من  $C$  وذلك من خلال استبدال قطعتين في الاتجاهين  $b_0, b_1$  بـ  $C_1$ ، في الترتيب الذي يحافظ على إسقاط  $PC'$  لـ  $C'$  على  $P$  من داخل  $C$ . (كما هو موضح في الشكل ٨، ١٠). عندها يكون  $\Phi(C') = \Phi(C)$ . ليكن  $S'$  سطح تصغير المساحة المحدود بـ  $C'$ . عندها يكون

$$\text{area} S' > \text{area} PS' > \text{area} S.$$

وبالتالي يكون

$$\frac{\text{area} S'}{\Phi(C')^2} > \frac{\text{area} S}{\Phi(C)^2}.$$

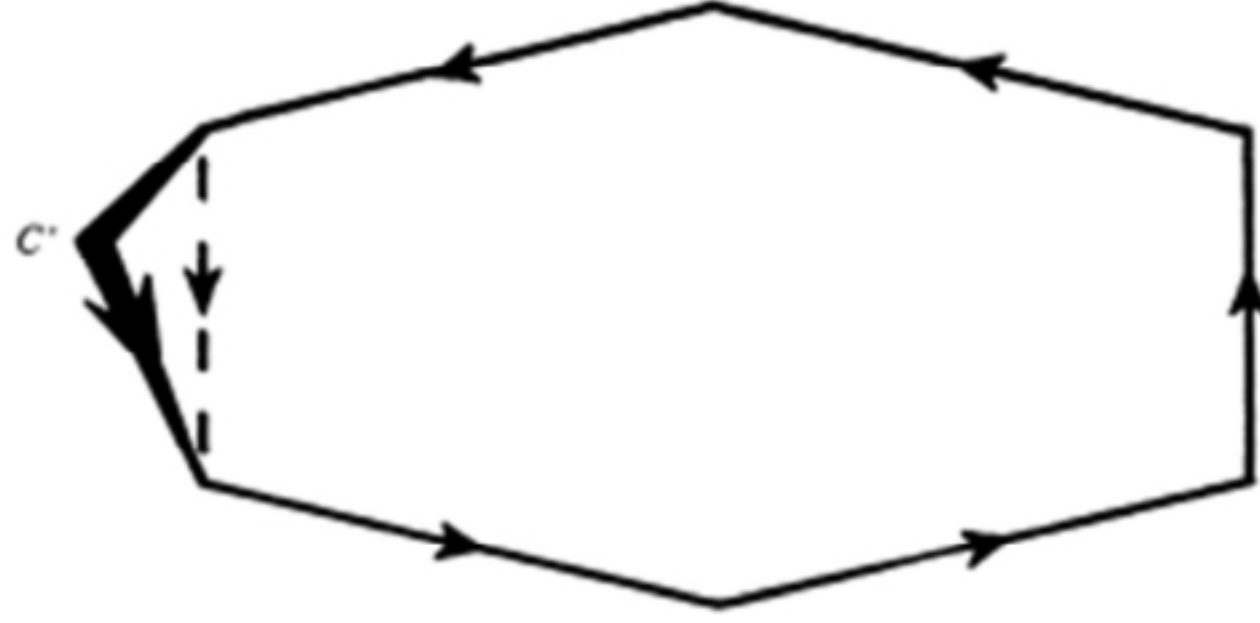


الشكل (٧، ١٠). في المستوي  $P$ ، يكون البلور ولف  $S$  المضلع الثنائي بالنسبة لـ  $A$ ، الذي يدور  $90^\circ$  درجة في اتجاه عقارب الساعة.

ملاحظة: بالتقريب، يمكن التوصل إلى أمثلة ناعمة وناقصية.

بالنسبة للطول، تكون المنحنيات متساوية المحيط المثالية دوائر تقوس ثابت. بالنسبة للمعيار

$\Phi$  في العموم، يحقق التقوس المعمم التباين على الأقل.



الشكل (٨, ١٠). يمكن التوصل إلى  $C'$  من  $C$  وذلك من خلال استبدال مقاطع في الاتجاهين  $b_0, b_1$  بـ  $C_1$ . عندها يكون  $\Phi(C') = \Phi(C)$ ، إلا أن  $\text{area } S' \geq \text{area } S$ .

(٩, ١٠) تمهيدية

بالنسبة للمنحنى  $C_0$  للمرتبة  $C^2$  لتساوي المحيط المثالي، فإن تعميم متجة التقوس  $\Phi$

يُحقق

$$(١٠, ١) \quad \left| D^2 \Phi(\kappa) \right| \leq \frac{\Phi(C_0)}{2 \text{ area } S_0}$$

ملاحظات: بالنسبة للحالة التي يكون فيها المعيار  $\Phi$  طولاً و  $C_0$  هي دائرة الوحدة، ومن (١, ١٠) نقول إن  $|\kappa| \leq 1$ . إنَّ فرضية النعومة على  $C_0$  غير ضرورية؛ ومع ذلك ينطوي الاستنتاج على أن  $C_0$  هو  $C^{1,1}$ . إذا كان  $C_0$  سطحاً ناعماً محدوداً ووحيداً لتصغير المساحة  $S_0$  ويكون  $n$  الناظمي الداخلي لـ  $C_0$  على طول  $S_0$ ، يجب أن يكون  $D^2 \Phi(\kappa)$  مضاعفاً ثابتاً لـ  $n$ . على وجه الخصوص، إنَّ لمنحني متساوي المحيط المستوى المثالي، فأن التقوس المعمم الثابت هو

$$\left| D^2 \Phi(\kappa) \right| = K.$$

البرهان: ليكن  $f: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}^n$  تعليم طول قوس محلي لـ  $C_0$ . عند المتغيرين المدعومين المتراسين  $\delta f$ . عندها يكون

$$\begin{aligned} 0 &\geq \delta \left( \text{area } S - a \Phi(C)^2 \right) \\ &\geq - \int |\delta f| ds + 2a \Phi(C_0) \int D^2 \Phi(\kappa) \cdot \delta f ds \end{aligned}$$

ومن فرضية التقوس المعمم ٤, ١٠ يصبح

$$|D^2\Phi(\kappa)| \leq \frac{1}{2a\Phi(C_0)} = \frac{\Phi(C_0)}{2\text{area}S_0}.$$

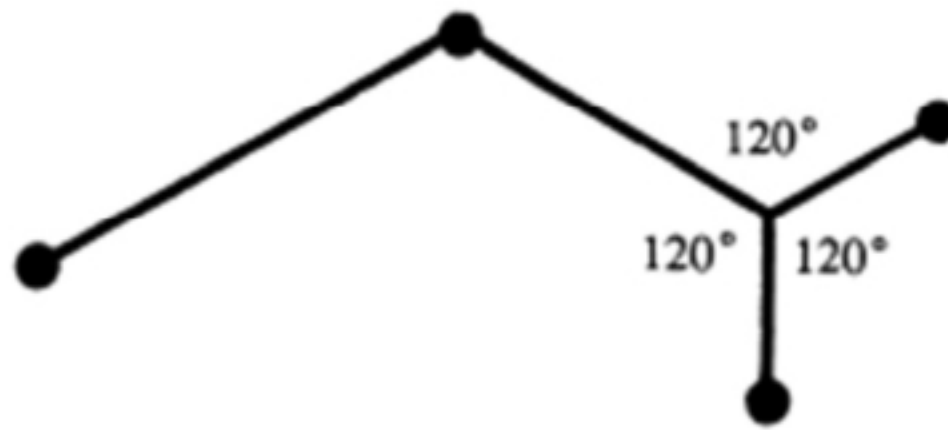
يُسمى المعيار  $\Phi$  البلوري إذا كانت كرة  $\Phi$  الوحدة، متعدد سطح نوفي.

(١٠, ١٠) الحدس

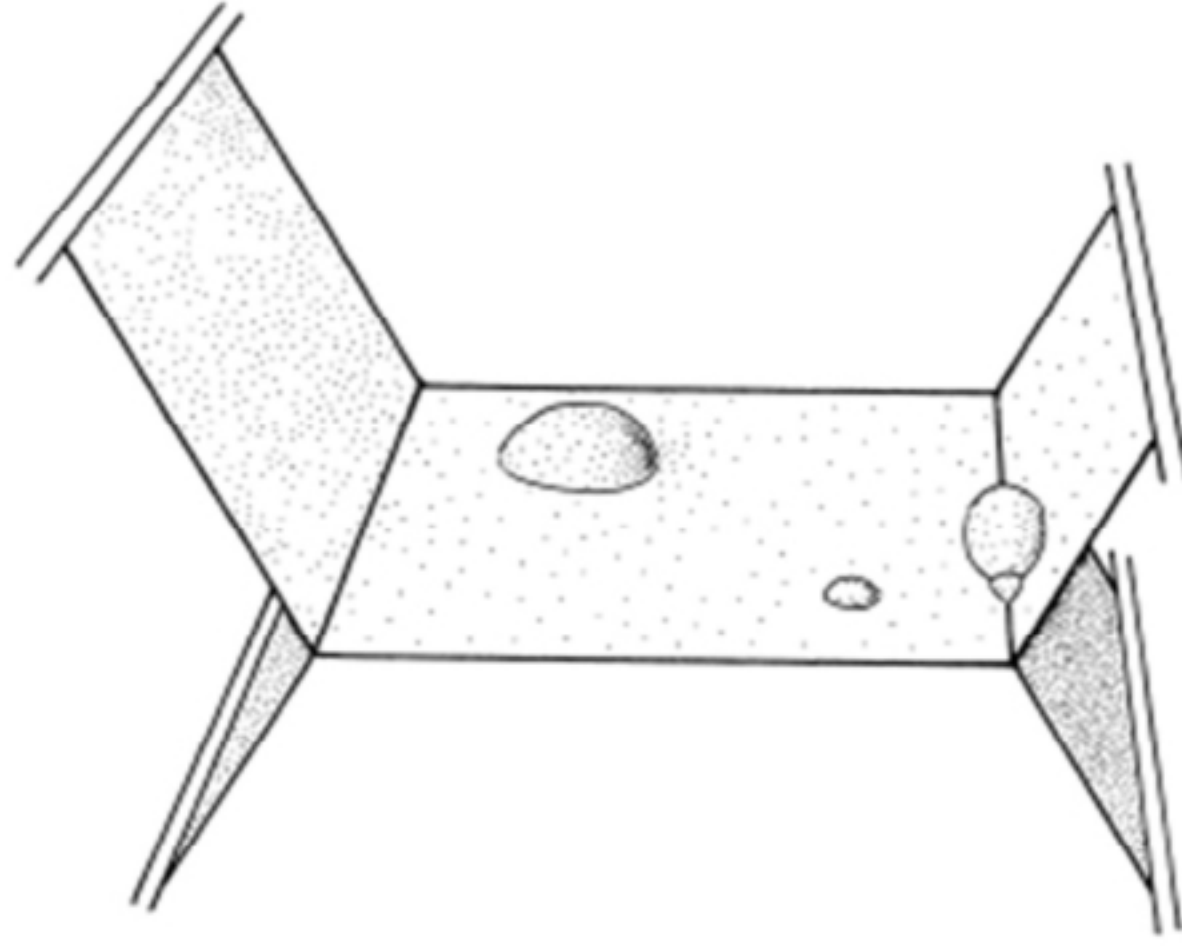
إذا كان  $\Phi$  بلورياً، عندها يكون منحنى متساوي المحيط المثالي مضلعاً.

(١٠, ١١) شبكات تصغير المعيار  $\Phi$

إنَّ الشبكة  $N$  هي مجموعة محدودة لقطع مستقيمة. عند تحديد المعيار  $\Phi$  ومجموعة محدودة ذات نقاط حدية في  $\mathbb{R}^n$ ، نبحث عن شبكة تصغير المعيار  $\Phi$  التي تصل النقاط بعضها ببعض. وبالنسبة للحالة التي يكون فيها المعيار  $\Phi$  هو الطول، مسألة فيرما "Steiner" أو "Fermat" المعممة (راجع Fermat، ١٦٣٨، [Fer]، الصفحة ١٥٣؛ Steiner، ١٨٣٥ م، [Ste1]، [Ste2]؛ Jarnik و Kossler ١٩٣٤ م [Jatr])، إنَّ هذه الشبكات تلتقي فقط في الثلاثات عند زوايا قياسها  $120^\circ$  درجة (أو في المثنى عند النقاط الحدية لزوايا لا تقل عن  $120^\circ$  درجة)، كما هو موضح في الشكل (٩, ١٠). تتصرف أشرطة فيلم الصابون بشكلٍ مماثل في محاولتها لتصغير المساحة، كما هو موضح في الشكل (١٠, ١٠) (راجع أيضاً Courant و Robbins (Cou)، الصفحات من ٣٥٤ إلى ٣٦١ و صفحة ٣٩٢).



الشكل (٩, ١٠). تلتقي شبكات تصغير الطول في الثلاثات بالتساوي عند زوايا قياسها  $120^\circ$  الدرجة.



الشكل (١٠, ١٠). تلتقي أفلام الصابون في الثلاثات عند زوايا قياسها  $120^\circ$  درجة في محاولة لتصغير المساحة

وقد ظهرت منذ وقت قريب نتائج عن المعيار العام  $\Phi$ ، توصل إليها العديد من الطلاب الجامعيين (راجع الدراسات الاستقصائية التي أجراها Morgan [Mor6]، [Mor7]).

#### (١٠, ١٢) نظرية

(Levy [Lev2]، Alfaro وآخرون [Alf2]). ليكن المعيار  $\Phi$  محدباً بشكلٍ موحد وقابلاً للاشتقاق على  $\mathbb{R}^2$ . عندها لا تلتقي شبكات تصغير المعيار  $\Phi$  إلا في الثلاثات. يبين البرهان أن تقاطع أربع قطع أو أكثر غير مستقر.

#### (١٠, ١٣) نظرية

(Lawlor و Morgan [Law]، النظرية ٤, ٤). ليكن المعيار  $\Phi$  قابلاً للاشتقاق على  $\mathbb{R}^n$ . في شبكات تصغير المعيار  $\Phi$ ، يمكن أن تلتقي القطع  $n+1$  عند نقطة معينة إلا أنها لا تلتقي القطع  $n+2$  أبداً.

يبدو أنه يمكن "معايرة" جميع هذه التقاطعات وتصنيفها محلياً. تعرض النظرية التالية، بالمقارنة مع النظرية ١٢, ١٠، حساسية مفاجئة لفئة النواعم.



## (١٠, ١٤) نظرية

(المجموعة الهندسية SMALL ١٩٩٨ م، Alfaro وآخرون [Alf1], [Alf2]. في معايير  $\Phi$  محدّبة بشكلٍ موحد وقابلة للاشتقاق قطعةً قطعةً على  $\mathbb{R}^2$ . تلتقي أحياناً شبكات تصغير المعيار  $\Phi$  في الأربعات، على الرغم من أنها لا تلتقي في الخمسات إطلاقاً.

يبيّن البرهان أنّه يمكن أن يكون  $X$  تصغيراً للمعيار  $\Phi$  بجدليات متناظرة واستخدام حساب التفاضل والتكامل. إنّ البرهان أسهل بكثير بالنسبة لـ "معيار مستقيم" أو "مقياس مانهاتن"  $\Phi_M$ ، وهو ليس محدّباً بشكلٍ موحد (راجع Hanan [Han]).

لقد درس E. Cockayne [Coc] في وقتٍ مبكرٍ معايير المستوي، إلا أنه لم يناقش الاعتماد على التفاضل.

## (١٠, ١٥) نظرية

([Con] Conger). في معايير  $\Phi$  محدّبة بشكلٍ موحد وقابلة للاشتقاق قطعةً قطعةً على  $\mathbb{R}^3$ . تلتقي شبكات تصغير المعيار  $\Phi$  في الستات.

يبيّن البرهان أنّ القطع الست التي تلتقي على طول المحاور المتعامدة في  $\mathbb{R}^3$  هي تصغير المعيار  $\Phi$  بالنسبة للمعيار  $\Phi$ . يتطلب عدد كبير من المتنافسين المحتملين ذكاءً وإصراراً للبرهنة. تخنّ Conger أنّ الحد الدقيق لعدد القطع التي تلتقي في شبكة تصغير المعيار  $\Phi$  في  $\mathbb{R}^n$  هو  $2n$ . بالنسبة للمعايير المحدّبة بشكلٍ غير موحد، إذا كانت كرة  $\Phi$  الوحدة، مكعباً في  $\mathbb{R}^n$ ، فإنّ الشبكة المؤلفة من القطع  $2^n$  من المركز إلى الرؤوس هي تصغير المعيار  $\Phi$ ، وذلك ببرهان سهل. من المحتمل أن يظهر ذلك الحد العلوي (راجع Furedi, Lagarias، و Morgan [Fur]، مقدمة، النظرية [٢, ١]).

راجع العمل ذا الصلة للدكتور [Cie1], [Cie2] و K. Swanepoel [Swa].

## الصيغ المختارة

متجة التقوس:

(٢, ١)

$$\kappa = dT/ds.$$

طول قوس المنحنى  $u(t)$ :

(٣, ١)

$$\int \sqrt{\sum g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j} dt$$

$$\mathbf{x}_i (\dot{u}^i = du^i / dt)$$

قياس السطح  $x(u^i)$ :

(٣, ٢)

$$g_{ij} = \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j$$

(تعطي  $u^1, u^2, \dots$  معلومات على السطح؛  $\mathbf{x}_i = \partial \mathbf{x} / \partial u^i$ ) والمصفوفة المعكوسة  $g^{ij}$ .  
سطح ثنائي الأبعاد  $\mathbf{x}(u^1, u^2)$  في  $\mathbb{R}^3$ :

$$H = \text{trace} \mathbf{\Pi} = \kappa_1 + \kappa_2$$

التقوس الوسطي

(٤, ٣)

$$H = \frac{\mathbf{x}_2^2 \mathbf{x}_{11} - 2(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2) \mathbf{x}_{12} + \mathbf{x}_1^2 \mathbf{x}_{22}}{\mathbf{x}_1^2 \mathbf{x}_2^2 - (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2)^2} \cdot \mathbf{n}$$



تقوس جاوس  $G = \det \mathbf{II} = \kappa_1 \kappa_2$

(٥, ٣)

$$G = \frac{(\mathbf{x}_{11} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{x}_{22} \cdot \mathbf{n}) - (\mathbf{x}_{12} \cdot \mathbf{n})^2}{\mathbf{x}_1^2 \mathbf{x}_2^2 - (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2)^2}$$

بالنسبة لصورة الدالة  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

(٦, ٣)

$$H = \frac{(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy}}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}$$

(٧, ٣)

$$G = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}$$

سطح ثنائي الأبعاد  $\mathbf{x}(u^1, u^2)$  في  $\mathbb{R}^n$ :

متجة التقوس الوسطي  $\mathbf{H} = \text{trace} \mathbf{II}$

(٨, ٤)

$$\mathbf{H} = P \frac{\mathbf{x}_2^2 \mathbf{x}_{11} - 2(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2) \mathbf{x}_{12} + \mathbf{x}_1^2 \mathbf{x}_{22}}{\mathbf{x}_1^2 \mathbf{x}_2^2 - (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2)^2}$$

تقوس جاوس  $G = \det \mathbf{II}$

(٩, ٤)

$$G = \frac{(P\mathbf{x}_{11}) \cdot (P\mathbf{x}_{22}) - (P\mathbf{x}_{12})^2}{\mathbf{x}_1^2 \mathbf{x}_2^2 - (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2)^2}$$

حيث يشير  $P$  إلى الإسقاط على  $T_p S^\perp$ .

بالنسبة لرسم الدالة  $f : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$

$$H = \operatorname{div} \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} = \frac{\left(1 + |\nabla f|^2\right) \nabla f - \sum f_i f_j f_{ij}}{\left(1 + |\nabla f|^2\right)^{3/2}},$$

حيث إنّ

$f_i = \partial f / \partial x_i$ ,  $f_{ij} = \partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$ ,  $\nabla f = (f_1, \dots, f_{n-1})$ ,  $\operatorname{div}(p, q, \dots) = p_1 + q_2 + \dots$   
و ،  $\Delta f = \operatorname{div} \nabla f = f_{11} + f_{22} + \dots$  ، (التمرين ١٢,٥).

بالنسبة لمجموعة المستوى  $\{f = c\}$  للدالة  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

(١, ٥)

$$H = -\operatorname{div} \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$

رموز كريستوفل:

(٢, ٦)

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \sum_l g^{il} (g_{lj,k} + g_{lk,j} - g_{jk,l})$$

موتر تقوس ريمان:

(٤, ٥)

$$R_{jkl}^i = a_{ik} \cdot a_{jl} - a_{jk} \cdot a_{il}$$

(٤, ٦)

$$R_{jkl}^i = -\Gamma_{jk,l}^i + \Gamma_{jk,l}^i + \sum_h \left( -\Gamma_{jk}^h \Gamma_{hl}^i + \Gamma_{jl}^h \Gamma_{hk}^i \right)$$

(إنّ  $a_{jk}$  هي مركبات للشكل الأساسي الثاني **II** في الإحداثيات المتعامدة.)

تقوس ريتشي:

$$(٧, ٦) \quad R_{jl} = \sum_i R_{jil}^i$$

التقوس القياسي:

$$(٨, ٦) \quad R = \sum g^{jl} R_{jl}$$

(إذا كان  $S$  سطحاً ثنائي الأبعاد،  $G = R / 2$ ).

والتقوس المقطعي لـ  $v, w$ ، متعامد:

$$(٩, ٥) \quad K(v \wedge w) = \mathbf{II}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \cdot \mathbf{II}(\mathbf{w}, \mathbf{w}) - \mathbf{II}(\mathbf{v}, \mathbf{w})^2$$

$$(٩, ٦) \quad K(v \wedge w) = \sum_{i,j,k,l} g_{ih} R_{jkl}^h v^i w^j v^k w^l$$

المشتق المتغاير لحقل المتجه  $X^i$ :

$$(١٠, ٦) \quad X_{;j}^i = X_{,j}^i + \sum_k \Gamma_{jk}^i X^k,$$

طول قوس الجيوديسي  $u(t), t$ :

$$(١٧, ٦) \quad 0 = \ddot{u}^i + \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i \dot{u}^j \dot{u}^k$$

الميل:

$$\nabla f^i = g^{ij} f_{,j}$$

لابلاس:

$$\Delta f = g^{ij} (f_{,ij} - \Gamma_{ij}^k f_{,k}) = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial u_i} \left( \sqrt{\det g} g^{ij} f_{,j} \right)$$

## حل التمارين المختارة

$$(١, ٢) \text{ (أ) } \kappa(0) = (0, 14)$$

$$(ب) \kappa(0) = 14 / (1 + 36)^{3/2} = 14 / 37^{3/2}$$

$$\text{الوحدة } n \text{ له الميل } -1/6, n = (-6, 1) / \sqrt{37}, \kappa(0) = 14(-6, 1) / 37^2$$

(ج) مثل ب.

$$(٢, ٢) \text{ (ب) } \kappa = (1+t)^{-3} \left( -2s - c - tc - ts - t^2 c, 2c - s - ts + tc - t^2 s, t^{-1/2} / \sqrt{2} - t^{1/2} / \sqrt{2} \right)$$

حيث إن  $s = \sin t, c = \cos t$ ، لاحظ أنه عندما تكون  $t$  كبيرة يصبح  $\kappa \sim -(c, s, 0) / t$  صغيراً

ويتجه نحو المحور  $z$

(ج) ١٢ قدم.

$$(٢, ٣) \kappa = 12x^2 (16x^6 + 1)^{-3/2} \text{ هو الأكبر عند } x = \pm 56^{-1/6} \approx \pm 0.511 \text{ وبصورة أعم،}$$

التقوس القياسي لـ  $\{y = x^n\}$ ،

$$\kappa = n(n-1)x^{n-2} (n^2 x^{2n-2} + 1)^{-3/2},$$

هو الأكبر عندما  $n \geq 3 \searrow x^{2n-2} = n^2 (2n-1) / (n-2)$

(٣, ١) التقوس في الاتجاه  $\theta$  هو  $2 \cos \theta \sin \theta$  إنَّ الاتجاهات الرئيسة هي  $3\pi/4, \pi/4$ ، وكذلك

$$\kappa_1 = 1, \kappa_2 = -1, H = 0, G = -1, \kappa'_1 + \kappa'_2 = 0, \kappa'_1 \kappa'_2 = 0$$

$$(٣, ٢) (أ.) \kappa_1 = 1/a, \kappa_2 = 1/a, G = 1/a^2, H = 2/a, -1/a, -1/a, 1/a^2, -2/a \text{ أو } \kappa_1 = 1/a, \kappa_2 = 1/a, G = 1/a^2, H = 2/a$$

$$(ب) 2a, 2b, 4ab, 2(a+b)$$

$$\mathbf{II} = D^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} 132 & -24 \\ -24 & 118 \end{bmatrix}, \quad H = 132 + 118 = 250, \quad (ج)$$

$$G = 132(118) - 24^2 = 15,000, \quad \kappa = \frac{H \pm \sqrt{H^2 - 4G}}{2} = 100, 150.$$

(د) لاحظ أن المستوي  $x, y$  ليس مستوى مماساً عند  $0$ ، لذا استخدم المعادلتين  $٦, ٣$  و  $٧, ٣$

$$. \kappa = 3\sqrt{2}, \sqrt{2}, \text{ لذلك } H = 4\sqrt{2}, G^* = G$$

(هـ) حوّل المتغيرات واستخدم المعادلتين  $٦, ٣$  و  $٧, ٣$ ،  $H = 0$ ،

$$G = -1 / \left( 1 + y^2 \sec^2 z \right)^2 = -1 / (1 + x^2 + y^2)^2,$$

$$\kappa = \pm 1 / (1 + y^2 \sec^2 z) = \pm 1 / (1 + x^2 + y^2).$$

(ز) استخدم المعادلتين  $٦, ٣$  و  $٧, ٣$  والتفاضل الضمني.

$$G = \left( \frac{36}{81x^2 + 16y^2 + z^2} \right)^2, \quad \kappa = \frac{H \pm \sqrt{H^2 - 4G}}{2}.$$

$$H = \frac{5 \cdot 3^4 x^2 + 10 \cdot 2^4 y^2 + 13z^2}{(81x^2 + 16y^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$(٣, ٤) \quad 2\pi a \operatorname{sinc} \quad (\text{دائرة نصف قطرها } a \operatorname{sinc}).$$

$$\mathbf{x} = (x, y, f(x, y)), \quad \mathbf{n} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}. \quad (٣, ٦)$$

$$H = \frac{(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy}}{(1 + f_x^2)(1 + f_y^2) - f_x^2 f_y^2} \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$$

$$G = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{1 + f_x^2 + f_y^2} \frac{1}{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

(٣, ٧)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_z &= (f' \cos \theta, f' \sin \theta, 1), \quad \mathbf{x}_\theta = (-f' \sin \theta, f' \cos \theta, 0), \\ \mathbf{n} &= -(\cos \theta, \sin \theta, -f')(1+f'^2)^{-1/2} \quad (\text{inward}), \\ \mathbf{x}_{zz} &= (f'' \cos \theta, f'' \sin \theta, 0), \quad \mathbf{x}_{z\theta} = (-f' \sin \theta, f' \cos \theta, 0), \\ H &= \frac{-f'' f' + f(1+f'^2)}{f^2(1+f'^2)} \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}} = \kappa + \frac{1}{f \sqrt{1+f'^2}}. \end{aligned}$$

(٣, ٩) باستخدام النظرية ٢, ٣ لأن  $H = 0$ .

(٣, ١٠)

$$A = \int_{\varphi=0}^{r/a} 2\pi a \sin \varphi d\varphi = 2\pi a^2 \left(1 - \cos \frac{r}{a}\right) = \pi r^2 - \frac{1}{a^2} \frac{\pi}{12} r^4 + \dots$$

(٤, ١)  $(-4/9, 4/9, 2/9, 0)$ .

(٤, ٢) (أ)

$$\mathbf{x} = (x, y, x^2 + 2y^2, 66x^2 - 24xy + 59y^2), \quad \mathbf{x}_1 = (1, 0, 0, 0), \quad \mathbf{x}_2 = (0, 1, 0, 0), \quad \mathbf{x}_{11} = (0, 0, 2, 132),$$

$$\mathbf{x}_{12} = (0, 0, 0, -24), \quad \mathbf{x}_{22} = (0, 0, 4, 118), \quad P\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}_{ij}$$

من الفرضية ٤, ٢,  $G = 15,008$ ,  $\mathbf{H} = (0, 0, 6, 250)$ . لاحظ أن الإجابات هي مجموع إجابات التمرين ٢, ٣ (ب, ج).

(ب)

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (x, y, x^2 - y^2, 2xy), \quad \mathbf{x}_1 = (1, 0, 2x, 2y), \quad \mathbf{x}_2 = (0, 1, -2y, 2x), \quad \mathbf{x}_{11} = (0, 0, 2, 0), \\ &\quad \mathbf{x}_{12} = (0, 0, 0, 2), \quad \mathbf{x}_{22} = (0, 0, -2, 0). \end{aligned}$$

من خلال الفرضية ٢، ٤،  $H = P \frac{0}{\text{Something}} = 0$ . بالنسبة لتوس جاوس  $G$ ، نحتاج إلى

$Px_{ij}$ . باعتبار أن  $x_1, x_2$  متعامدان

$$P(x_{11}) = x_{11} - \frac{x_{11} \cdot x_1}{x_1^2} x_1 - \frac{x_{11} \cdot x_2}{x_2^2} x_2 = \dots = \frac{(-4x, 4y, 2, 0)}{1 + 4x^2 + 4y^2},$$

$$P(x_{12}) = \frac{(-4y, -4x, 0, 2)}{1 + 4x^2 + 4y^2}, \quad P(x_{22}) = \frac{(4x, -4y, -2, 0)}{1 + 4x^2 + 4y^2}.$$

$$G = -8(1 + 4x^2 + 4y^2)^{-3} = -8(1 + 4|z|^2)^{-3}.$$

(٤، ٣)

$$y_1 = \sqrt{1 - x_1^2}, \quad y_2 = \sqrt{1 - x_2^2}$$

$$H(0, 1, 0, 1) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن  $H = \sqrt{2}$ ,  $G = 0$ .

(٤، ٤)

$$x = (z, f(z)), \quad z = u_1 + iu_2.$$

$$x_1 = (1, f'(z)), \quad x_2 = (i, if'(z)), \quad x_1 \cdot x_2 = 0 \quad (x_2 = ix_1),$$

$$x_{11} = (0, f''(z)), \quad x_{12} = (0, if''(z)), \quad x_{22} = (0, -f''(z)).$$

$$H = \frac{P(\mathbf{0})}{\text{something}} = 0,$$

من أجل  $G$  نحتاج  $Px_{ij}$ .

باعتبار  $x_1, x_2$  يشكلان أساساً عبر  $\mathbb{R}$ ، بالنسبة للفضاء الجزئي المولّد من  $(1, f'(z))$  على  $\mathbb{C}$

، يسقط  $P$  على الفضاء الجزئي المركّب المتعامد المولّد من  $(-f'(z), 1) \in \mathbb{C}^2$ .

$$P(x_{11}) = -P(x_{22}) = \frac{(-f \overline{f'}, f'')}{(1 + |f'|^2)}$$

$$P(x_{12}) = \frac{(-i f \overline{f'}, i f'')}{(1 + |f'|^2)}$$

$$G = -2 |f''|^2 (1 + |f'|^2)^{-3}$$

(٤, ٥) ينتج عن الحساب باستخدام الصيغة ١, ٤

$$H = P \mathbf{v} (1 + |f_x|^2 + |f_y|^2)^{-1}$$

حيث

$$\mathbf{v} = (1 + |f_y|^2) f_{xx} - 2(f_x \cdot f_y) f_{xy} + (1 + |f_x|^2) f_{yy} \in \mathbb{R}^{n-2} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-2}.$$

إذا كان  $\mathbf{v} = 0$ ، فإن  $H = 0$ ، والسطح متناهي الصغر. من جهةٍ أخرى، إذا كان  $H = 0$ ،

$$\text{فإن } \mathbf{v} \in \ker P \cap \mathbb{R}^{n-2} = \{0\}.$$

$$H = 18 \quad (٥, ١)$$

$$-6e_{131} - 12e_{234} \quad (٥, ٢)$$

(٥, ٣) أحد الاحتمالات أن يكون

$$u = (-1, 0, 1, -1),$$

$$v = (0, -1, 1, -1),$$

$$w = \left( -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right),$$

$$z = \left( \frac{2}{\sqrt{15}}, -\frac{3}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, -\frac{1}{\sqrt{15}} \right),$$

$$u \wedge v = e_{12} - e_{13} + e_{14} + e_{23} - e_{24},$$

$$w \wedge z = \frac{1}{\sqrt{5}} e_{12} - \frac{1}{\sqrt{5}} e_{13} + \frac{1}{\sqrt{5}} e_{14} + \frac{1}{\sqrt{5}} e_{23} - \frac{1}{\sqrt{5}} e_{24} = \frac{1}{\sqrt{5}} u \wedge v,$$

$$|w \wedge z| = 1.$$

$$e_{12} + 2e_{13} + 2e_{23} = (e_1 + e_2) \wedge (e_2 + 2e_3) \quad (٥, ٥)$$



(٥, ٦) الطريقة الأولى: افترض أن  $e_{12} + e_{34} = (\sum a_i e_i) \wedge (\sum b_j e_j)$ ، وقم باشتقاق التناقض.  
 الطريقة الثانية: إذا كان  $\xi$  بسيطاً، فإن  $\xi \wedge \xi = 0$ . باعتبار  
 $(e_{12} + e_{34}) \wedge (e_{12} + e_{34}) = 2e_{1234} \neq 0$ ، ليس بسيطاً.  $(\xi \in \wedge^2 \mathbb{R}^n)$ ،  $\xi$  يكون بسيطاً  
 إذا وفقط إذا كان  $\xi \wedge \xi = 0$ . أما بالنسبة إلى  $\xi \in \wedge_m \mathbb{R}^n, m > 2$ ، فيكون  $\xi$  بسيطاً إذا  
 وفقط إذا كان  $\xi \wedge \xi = 0$ .

(٥, ٧) بالنسبة لـ  $S^m$ ، إن جميع الشرائح كرات ذات تقوس جاوس  $1/a^2$ ، لذا فإن التقوس  
 القياسي هو  $m(m-1)/a^2$ .  $S^2(a) \times S^3(b) \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^7$ . إن كل شريحة هي إما  
 كرة وإما طارة وإن جميع التقوسات المقطعية هي  $1/a^2, 1/b^2$  أو 0، وهو ما يعطي تقوساً  
 قياسياً  $2/a^2 + 6/b^2$ .

(٥, ٨) (أ) 3

(ب) 31/6

(ج)

$$\begin{aligned} R_{1212} &= 3, & R_{1213} &= -1, & R_{1223} &= -5, \\ R_{1312} &= -3, & R_{1313} &= -4, & R_{1323} &= 0, \\ R_{2312} &= -5, & R_{2313} &= 0, & R_{2323} &= -1; \end{aligned}$$

$$\mathbf{II} = \left[ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] = \begin{bmatrix} (2,6) & (2,0) & (0,0) \\ (2,0) & (2,2) & (0,2) \\ (0,0) & (0,2) & (10,2) \end{bmatrix}. \quad (٥, ٩) \text{ (أ)}$$

$$K(e_1 \wedge e_2) = (2,6) \cdot (2,2) - (2,0) \cdot (2,0) = 12. \quad (ب)$$

$$(ج) \text{ إن الأساس المتعامد الواحد هو } v = (1, -1, 0) / \sqrt{2}, \quad w = (0, 0, 1)$$

$$K = \mathbf{II}(v, v) \cdot \mathbf{II}(w, w) - \mathbf{II}(v, w) \cdot \mathbf{II}(v, w) = (0, 4) \cdot (10, 2) - (0, -\sqrt{2}) \cdot (0, -\sqrt{2}) = 6.$$

إن الأساس المتعامد لـ  $\{x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$  هو

$$v = \frac{(1, -1, 0)}{\sqrt{2}}, \quad w = \frac{(1, 1, -2)}{\sqrt{6}}, \quad K = 0.$$

$$R_{1212} = 12, R_{1213} = 12, R_{1223} = 0, R_{1313} = 32, R_{1323} = 20, R_{2323} = 20. \quad (د)$$

والبقية بالتناظر. عند إعادة إجراء ب وج، نستنتج ما يلي:

$$(ب) \quad R_{1212} = 12.$$

(ج)

$$v_1 = -v_2 = 1/\sqrt{2}, \quad w_3 = 1.$$

$$K = \frac{1}{2}R_{1313} - \frac{1}{2}R_{1323} - \frac{1}{2}R_{2313} + \frac{1}{2}R_{2323} = 6.$$

$$v_1 = -v_2 = 1/\sqrt{2}, \quad v_3 = 0, \quad w_1 = w_2 = 1/\sqrt{6}, \quad w_3 = -2/\sqrt{6}$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{12}R_{1212} - \frac{1}{6}R_{1213} - \frac{1}{6}R_{1312} + \frac{1}{3}R_{1313} - \frac{1}{12}R_{1221} + \frac{1}{6}R_{1321} \\ &\quad - \frac{1}{3}R_{1323} - \frac{1}{12}R_{2112} + \frac{1}{6}R_{2113} - \frac{1}{3}R_{2313} + \frac{1}{12}R_{2121} + \frac{1}{3}R_{2323} \\ &= 1 - 2 - 2 + 32/3 + 1 - 2 - 20/3 + 1 - 2 - 20/3 + 1 + 20/3 = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Ric} = \begin{bmatrix} 44 & 20 & 0 \\ 20 & 32 & 12 \\ 0 & 12 & 52 \end{bmatrix}, \quad R = 44 + 32 + 52 = 128 \quad (د)$$

$$w = f(x, y, z) = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2} \quad (أ) \quad (٥, ١٠)$$

$$(ب) \quad f_{xx}(0) = 1/a, \quad f_{xy}(0) = 0, \quad \dots$$

$$(ج) \quad H = 3/a, \quad \mathbf{H} = (3/a)e_4 \quad (\text{العمودي لـ } S \text{ عند } P)$$

$$\mathbf{II}(v, v) = v \cdot ((1/a)\mathbf{I})(v) = (1/a)v \cdot v = 1/a. \quad (د)$$

$$\mathbf{II}(v, w) = v \cdot ((1/a)\mathbf{I})(w) = (1/a)v \cdot w = 0.$$

$$. K(v \wedge w) = (1/a)(1/a) - 0^2 = 1/a^2 \quad \text{وبالتالي فإن}$$

$$(هـ) \quad R_{ijij} = 1/a^2 \quad (i \neq j) \quad \text{والبقية } 0. \quad \text{على سبيل المثال, } R_{1223} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1/a & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{aligned}
 K(v \wedge w) &= \sum R_{ijkl} v^i w^j v^k w^l = \sum_{i \neq j} R_{ijij} v^i w^j v^i w^j + \sum_{i \neq j} R_{ijji} v^i w^j v^j w^i \\
 &= \frac{1}{a^2} \left( \sum (v^i)^2 \right) \left( \sum (w^j)^2 \right) - \frac{1}{a^2} \left( \sum v^i w^i \right) \left( \sum v^j w^j \right) \\
 &= \frac{1}{a^2} (1)(1) - \frac{1}{a^2} (0)(0) = \frac{1}{a^2}
 \end{aligned}
 \quad (ز)$$

(ح)  $R_{jl} = \sum R_{ijil} = 0$  إذا كان  $R_{jj} = \sum R_{ijij} = 2/a^2$ ، لذلك  $[R_{jl}]$  هو تماماً  $(2/a^2)I$ .

(ط)  $R = \text{tr } R_{jl} = 6/a^2$ .

(ي)  $H = -3/a$ .

(ك) على سبيل المثال.

$\mathbf{x}_2 = a(-\sin u_1 \sin u_2, \sin u_1 \cos u_2, 0, 0)$ ;  $g_{22} = \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2 = a^2 \sin^2 u_1$ .  
 (ل)  $\kappa = (-\cos t, -\sin t, 0, 0)/a$  نقطة داخلية، لذا فإن إسقاطه هو 0. إن طول المسار هو  $2\pi a$ .

(١١، ٥) إن كامل المشتق في  $\mathbb{R}^3$

$$Df = \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial z} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & z & y \end{bmatrix} = (0, 2y, 0)i + (1, 0, 1)j + (0, z, y)k.$$

$$Df(0, 0, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = (0, 0, 0)i + (1, 0, 1)j + (0, 1, 0)k.$$

إنّ التقيد بالاشتقاقات في الاتجاهات المماسّة (أول عمودين) والإسقاط على الفضاء المماس (أول

صفيين) يعطي المشتق المتغاير  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = (1, 0)j$ .

(١٢، ٥) ليكن  $g(x_1, \dots, x_n) = x_n - f(x_1, \dots, x_{n-1})$ . فإن رسم  $f$  هو مجموعة المستوى

$\{g = 0\}$ . من المعادلة ١، ٥،

$$\begin{aligned}
 H &= -\text{div} \frac{\nabla g}{|\nabla g|} = -\text{div} \frac{(-f_1, \dots, -f_{n-1}, 1)}{\sqrt{1+f_1^2 + \dots + f_{n-1}^2}} \\
 &= \text{div} \frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} - \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} = \text{div} \frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}
 \end{aligned}$$

(٥, ١٣) ليكن  $v = \sum v_i e_i$ ,  $w = \sum w_i e_i$  أساساً متعامداً لـ  $P$ . عندها

$$p_{ij}^2 = (v_i w_j - v_j w_i)^2 = v_i^2 w_j^2 + v_j^2 w_i^2 - 2v_i v_j w_i w_j.$$

$$K(P) = II(v, v)II(w, w) - II(v, w)II(v, w)$$

$$= \left( \sum v_i^2 \kappa_i \right) \left( \sum w_j^2 \kappa_j \right) - \left( \sum v_i w_i \kappa_i \right) \left( \sum v_j w_j \kappa_j \right).$$

إن معامل  $\kappa_i^2$  هو  $v_i^2 w_i^2 - v_i^2 w_i^2 = 0$ .

ومعامل  $\kappa_i \kappa_j$  هو  $v_i^2 w_j^2 + v_j^2 w_i^2 - 2(v_i v_j w_i w_j) = p_{ij}^2$ .

(٥, ١٤) اكتب  $T$  على أنه رسم الدالة عبر المستوي المماس عند  $p = (0, 1, 0, 1, \dots)$  أي مستوي

$$: x_1, x_3, \dots, x_{2n-1}$$

$$(x_2, x_4, \dots) = f(x_1, x_3, \dots) = \left( \sqrt{1-x_1^2}, \sqrt{1-x_3^2}, \dots \right),$$

واحسب ذلك عند النقطة  $p$ .

$$\mathbf{II} = D^2 f(0, 0, \dots) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

بحيث يكون  $R_{ijkl} = 0$  و  $K = 0$ . والآن  $K = 0$  في كل مكان بالتناظر. بدلاً من ذلك، قم

بتعليم  $T$  على أنه  $\mathbf{x} = (\cos \theta_1, \sin \theta_1, \cos \theta_2, \sin \theta_2, \dots)$ . احسب  $[g_{ij}] = [\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j]$

(وهو ثابت!)، لذا تنعدم رموز كريستوفل، وتقوس ريمان، والتقوس المقطعي.

(٦,٣) (ج) للخروج من النظام إلى معادلة التفاضل الوحيدة، استخدم  $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \phi' \dot{\theta}$  وبالتالي  $\ddot{\phi} = \phi'' \dot{\theta}^2 + \phi' \ddot{\theta}$  ثم احذف  $\ddot{\theta}$ .

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^1 &= -\cos u_1 \sin u_1 = -\frac{1}{2} \sin 2u_1, & \Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2} \sin 2u_1 \\ \Gamma_{12}^2 &= \cot u_1, & \Gamma_{13}^3 &= -\tan u_1, \quad \text{rest} = 0 \end{aligned} \quad (٦,٤) \text{ (ب)}$$

(د)  $| \partial / \partial u_1 |^2 = g_{11} = a^2$  لذا  $\partial / \partial u_1 = a^{-1} v$ .

$\text{Ric}(v, v) = a^{-2} R_{11} = 2/a^2$ ,  $m-1=2$  مرّنا متوسط  $1/a^2$  تقوسات المقاطع التي تتضمن  $v$ .

(هـ)  $R = g^{j1} R_{j1} = 6/a^2$ ,  $m(m-1) = 6$  مرات متوسط جميع التقوسات المقطعية.

(و) إنها دائرة كبيرة، في المستوي  $[w=y \text{ و } z=x]$ .

(٧, ١)  $3.8''$  قرن. إنَّ اختلافاً مركزياً صغيراً يجعل المقياس التجريبي الدقيق، صعباً.

(٧, ٢)  $r = r_0$  و  $\phi = \pi/2$ . إن المعادلة الأولى للجيوديسي تعطي  $(d\theta/dt)^2 = GMr_0^{-3}$ .  
والسرعة  $r_0(d\theta/dt) = (GMr_0^{-1})^{1/2}$  مماثلة للنتيجة التقليدية. يجب أن يكون المراقب بعيداً بما يكفي لجعل تشوه الوقت النسبي قليلاً. لاحظ أيضاً أنه في حين أن محيط المدار هو  $2\pi r_0$  (لأنه لا يوجد تشوه نسبي في الاتجاه المماس)، فإن المسافة إلى نقطة الأصل ليست  $r_0$  (لأنه لا يوجد تشوه نسبي في الاتجاه الشعاعي، في إحداثياتنا).

(٧, ٣) (أ). نعم

(ب) توصلنا إلى أن  $r_0(d\theta/dt) = 3/5$ ؛  $\phi$  ثابت، ويكون  $\phi = \pi/2$ . وبالتالي فإنَّ

$$dr^2 = -r_0^2 d\theta^2 + dt^2 = (16/9)r_0^2 d\theta^2. \quad \Delta\tau = (4/3)r_0\Delta\theta = (8/3)\pi r_0$$

(٧, ٤) على افتراض أن  $\theta, \phi$ ، ثابتان. ينتج عن المعادلتين (١٤, ٧)، (١٨, ٧)

$$-(dr/dt)^2 \beta^2 (1 - \alpha^2 r^{-1})^{-3} + \beta^2 (1 - \alpha^2 r^{-1})^{-1} = 1$$

تتضمن السرعة الأولية المحددة  $\beta^2 = 1$ . ينتج ذلك عن استبدال  $\alpha r^{-1/2}$  بالمقدار الصغير

$$w \text{ يتضمن } \frac{2dw}{w^4(1-w^2)} = \alpha^{-2} dt$$

$$\cdot \left( \frac{2}{w^4} + \frac{2}{w^2} + \frac{1}{1+w} + \frac{1}{1-w} \right) dw = \alpha^{-2} dt \text{ عبر الكسور الجزئية}$$

$$\cdot 2w^{-1} + \frac{2}{3}w^{-3} - \ln \left| \frac{1+w}{1-w} \right| = -\alpha^{-2}t + c_0 \text{ ينتج عن التكامل}$$

باعتبار أن

$$\alpha = \sqrt{2GM} = 1.6293 \times 10^{10} \text{ m}^{3/2} / \text{sec}, w_1 = 42,069 \text{ m} / \text{sec} = 1.4023 \times 10^{-4}$$

$$\cdot w_2 = 2.0586 \times 10^{-3} \text{ (حوّلت باستخدام سرعة الضوء)}$$

$$\text{الآن } \Delta t \approx 6.416 \times 10^{31} \text{ m}^3 / \text{sec}^2 = 2.376 \times 10^6 \text{ sec} \approx 27 \frac{1}{2} \text{ يوم. حيث إن}$$

$$w \rightarrow 1, t \rightarrow +\infty$$

(٨, ٣) ملاحظة: عند تحديد تثليثين، ابحث في تثليث جزئي عام.

(٨, ٦) يتحرك متجة الاتجاه  $v$  من خلال النقل الموازي نحو الشرق على طول دائرة مثبتة لخط العرض عند دوران الأرض. باعتبار دائرة خط العرض تدور نحو اليسار، فإن  $v$  يدور نحو اليمين (باتجاه عقارب الساعة)  $240^\circ = 4\pi/3$  في يوم كامل. من خلال نظرية جاوس وبونيه، يجب أن يساوي  $2\pi - 4\pi/3$  تكامل تقوس جاوس عبر السعة القطبية المحصورة، مساحة جزء كرة الوحدة فوق خط العرض  $L$ ، التي تساوي  $2\pi - 2\pi \sin L$  ومن التمرين ١٠، ٣. وبالتالي،  $\sin L = 2/3$  و  $L$  هي حوالي 42 درجة.

(٨, ٧) (أ) صحيح. يكفي توضيح أنه يمكن نقل أي متجة مماس وحدة  $v$  في القطب الشمالي بشكل متواز لأي متجة مماس وحدة آخر  $w$  في القطب الشمالي. ما عليك إلا نقله إلى الاتجاه الذي

يشير إليه على خط الاستواء، انقله على طول خط الاستواء، أعده على طول خط الطول حيث يشير  $w$ .

(ب) خطأ. لا يمكن نقل متجة مماس عند نقطة معينة على الأسطوانة، بشكل متواز إلى أي متجة مماس آخر في تلك النقطة.

(٨, ٨) على الرغم من أنه يمكن تدوين الكرة على شكل رسم، أو مجموعة مستوى، أو سطح معلّم. إلا أنه من السهل العمل بناءً على المبادئ الأولى، وذلك لأن الشرائح أحادية البعد ذات الصلة هي جميعها دوائر لها نصف القطر  $\alpha$ .

$$(أ) \quad 1/a^2, 1/a^2, 2/a^2, 2/a, (2/a)(-x/a) \\ (ب). 0.$$

$$(ج) \quad \kappa = 1/(a \sin \varphi), \quad \kappa_g = \cos \varphi / (a \sin \varphi)$$

(٨, ٩) (أ)  $H = 1/z\sqrt{2}, G = 0$ . (استخدم المعادلتين ٦, ٣ و ٧, ٣، باعتبار  $\Pi = D^2 f$ ، المستوي  $x, y$  ليس مماساً لـ  $C$ . لاحظ أن  $H$  و  $G$  غير محددتين في المتجة.) (ب) الجميع 0.

$$(ج) \quad \kappa = 1/z \Rightarrow \kappa_g = 1/z\sqrt{2}$$

$$(د) \quad \pi r^2 / \sqrt{2}$$

(هـ) تفشل السلاسة.

(و)  $2\sqrt{2} \sin(\pi/2\sqrt{2})$ . (بناءً على  $G = 0$ ، يمكن فتح المخروط وثنيه (دون تمديد) في جزء سطح مستو مسطح، وقد تم تصغير المسألة إلى حساب مثلثات بسيط.)



## المراجع

- [Alf1] Manuel Alfaro, Mark Conger, Kenneth Hodges, Adam Levy, Rajiv Kochar, Lisa Kuklinski, Zia Mahmood, and Karen von Haam. Segments can meet in fours in energy-minimizing networks. J. Und. Math. 22(1990), 9-20. (§10.14)
- [Alf2] Manuel Alfaro, Mark Conger, Kenneth Hodges, Adam Levy, Rajiv Kochar, Lisa Kuklinski, Zia Mahmood, and Karen von Haam. The structure of singularities in  $\Phi$ -minimizing networks in  $\mathbb{R}^2$ . Pacific J. Math. 149 (1991), 201-210. (§10.12, §10.14)
- [All1] C. B. Allendoerfer. The Euler number of a Riemannian manifold. Arno: J. Math. 62 (1940), 243-248. (§8.5)
- [All2] C. B. Allendoerfer and Andre Weil. The Gauss-Bonnet theorem for Riemannian polyhedra. Trans. AM S 53 (1943), 101-129. (§8.5)
- [Alm] F. Almgren. Optimal **isoperimetric** inequalities. Indiana U. Math. J. 35 (1986), 451-547. (§10.5)
- [Ben] Hai Benjamini and Jianguo Cao. A new isoperimetric theorem for surfaces of variable curvature. Duke Math. J. 85 (1996), 359-396. (§9.12)
- [Ber] Marcel Berger. Geometry II. New York: Springer-Verlag, 1977. (§10.5)
- [Ber1] Marcel Berger. Les varietes riemanniennes 1/4-pinched. Ann. Scuola Norm. Sup. 14 (1960), 161-170. (§§9.9, 9.10)
- [Ber2] Marcel Berger. On the diameter of some riemannian manifolds. Berkeley preprint (1962). (§9.7)
- [Bro] John E. Brothers and Frank Morgan. The isoperimetric theorem for general integrands. Michigan Math. J. 41 (1994), 419-431. (§10.6)
- [Bru] H. Bruhn. Uber Ovale and Eiflachen. Inaugural dissertation. Munchen, 1887. (§10.5)
- [Cha] Isaac Chavel. Riemannian Geometry: A Modern Introduction. New York: Cambridge University Press, 1993. (Preface, §9.6)
- [Che1] Jeff Cheeger and David G. Ebin, Comparison Theorems in Riemannian Geometry. Amsterdam: North-Holland. 1975. (§6.4, §9.0, §9.3, §9.6)
- [Che2] S. Y Cheng. Eigenvalue comparison theorem and its geometric applications. Math. Z 142 (1975). 289-297. (§9.7)
- [Che3] S.-S. Chern. A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds. Ann. Math. 45 (1944). 747-752. (§8.5)
- [Cie1] Dietmar Cieslik. Hadwiger numbers in network design. In Proceedings of Network Design: Connectivity and Facilities Location Conference. 1997. edited by D. Z. Du and P. M. Pardalos. Proc. DIMACS Series in Discrete Math, and Comp. Sci.. 1997. (§10.15)
- [Cie2] Dietmar Cieslik, Steiner-Minimal-Trees. Norwood, MA: Kluwer Academic Publishers. 1998. (§10.15)



- [Coc] E. J. Cockayne. On the Steiner problem. Canadian Math. Bull. 10 (1967). 431-450. (§10.14)
- [Con] Mark A. Conger. Energy-minimizing networks in  $\mathbb{R}^n$ . Undergraduate thesis. Williams College, Williamstown., MA, 1989, expanded 1989. (§10.15)
- [Cos] C. Costa. Imersões mínimas completas em  $\mathbb{R}^3$  de gênero um e curvatura total finita. Doctoral thesis, IMPA. Rio de Janeiro, Brazil. 1982. (See also: Example of a complete minimal immersion in  $\mathbb{R}^3$  of genus one and three embedded ends. Bull. Math. Soc. Bras. Mat. 15 (1984), 47-54. (Figure 3.5))
- [Cot] Andrew Cotton, David Freeman, Andrei Gnepp, Ting Ng, John Spivack, and Cara Yoder (1998 and 2000 Williams College "SMALL" undergraduate research Geometry Groups). The isoperimetric problem singular on surfaces, preprint (2000). (§9.7, §9.12)
- [Cou] R. Courant and H. Robbins. What Is Mathematics? New York: Oxford Univ. Press, 1941. (§10.11)
- [Ein] A. Einstein. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Ann. Der Physik 49 (1916). English translation: The foundation of the general theory of relativity, translated by W. Perrett and G. B. Jeffery. In The Principle of Relativity, by H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, and H. Weyl, 109-164. New York: Dover. 1952. (§7.6)
- [Fed] Herbert Federer. Geometric Measure Theory. New York: Springer, 1969. (§10.5)
- [Fen] W. Fenchel. On total curvature of Riemannian manifolds: I. J London Math. Soc. 15 (1940), 15-22. (§8.5)
- [Fer] P. Fermat. Oeuvres de Fermat. Paris: Gauthier-Villars, 1891. (§10.11)
- [Foi] Joel Foisy, Manuel Alfaro, Jeffrey Brock, Nickelous Hodges, and Jason Zimba. The standard double soap bubble in  $\mathbb{R}^2$  uniquely minimizes perimeter. Pacific Math. 159 (1993), 47-59. (§10.7)
- [Fre] Christopher French, Kristen Albrethsen, Charene Arthur, Heather Curnutt, Scott Greenleaf, and Christopher Kollett (1993 Small Geometry Group). The planar double Wulff crystal. Williams College. Williamstown, MA, 1993. (§10.7)
- [Fur] Z. Füredi, J. C. Lagarias, and F. Morgan. Singularities of minimal surfaces and networks and related extremal problems in Minkowski space, Proc. DIMACS Series in Discrete Math, and Comp. Sci. 6 (1991), 95 — 106. (§10.15)
- [Got] David Henry Gottlieb. Note on Gauss-Bonnet. Amer. Math. Monthly 104 (Jan. 1997), 35. (§8.5)
- [Gro] M. Gromov. Isoperimetric inequalities in Riemannian manifolds. In Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces (Appendix I) by Vitali D. Milman and Gideon Schechtman, Lecture Notes in Mathematics, No. 1200, 114-129. New York: Springer-Verlag. 1986. (§10.5)
- [Gro2] K. Grove and K. Shiohama. A generalized sphere theorem Ann. Math. 106 (1977), 201-211. (§9.7)
- [Han] M. Hanan. On Steiner's problem with rectilinear distance. J. SIAM Appl. Math 14 (1966), 255-265. (§10.14)
- [Har1] Philip Hartman. On exterior derivatives and solutions of ordinary differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. 91 (1959). 277-293. (§6.4)
- [Har2] Philip Hartman. Ordinary Differential Equations. Boston: Birkhauser. 1982. (§6.4)
- [Has] Joel Hass and Frank Morgan. Geodesics and soap bubbles in surfaces. Math. Z 223 (1996). 185-196. (§9.12)
- [Hel] Sigurdur Helgason. Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces. Boston: Academic Press. 1978. (§6.4, §9.2)

- [Hic] Noel J. Hicks. Notes on Differential Geometry. Princeton: Van Nostrand. 1965 (out of print). (Preface)
- [Hil] Stefan Hildebrandt and Anthony Tromba. The Parsimonius Universe. New York: Copernicus, Springer-Verlag. 1996. (§10.1)
- [Hof1] David Hoffman. The computer-aided discovery of new embedded minimal surfaces. Math Intelligencer 9 (1987), 8-21. (Figure 3.5)
- [Hof2] D. Hoffman and W. H. Meeks, III. A complete embedded minimal surface in  $\mathbb{R}^3$  with genus one and three ends. J. Diff. Geom. 21 (1985), 109-127. (Figure 3.5)
- [Hof3] David Hoffman. Fusheng Wei. and Hermann Karcher. Adding handles to the helicoid. Bull. Amer. Math. Soc. 29 (1993). 77-84. (Figure 3.6)
- [Hop] Heinz Hopf. Über die Curvatura integra geschlossener Hyperflächen. Math. Ann. 905 (1925), 340-376. (§8.4)
- [How] Hugh Howards, Michael Hutchings. and Frank Morgan. Tice isoperimetric problem on surfaces. Am, Math, Monthly 106 (1999). 430-439. (§9.12)
- [Jar] V. Jarník and O. Kossler. 0 minimalnich grafesh obsahujících n danych bodu. Casopis Pest. Mat, Fys. 63 (1934), 223-235. (§10.11)
- [Jef] G. B. Jeffery. Relativity for Physics Students. New York: Dutton, 1924. (§7.1)
- [Kli] W. Klingenberg. Über Riemannian Mannigfaltigkeiten mit positive Krümmung. Comm. Math. Helv. 50 (1961), 47-54. (§9.9)
- [Kno] Herbert Knothe. Contributions to the theory of convex bodies. Michigan Math. J. 4 (1952). 39-52. (§10.5)
- [Lau] Deilef Laugwitz. Differential and Riemannian Geometry. Boston: Academic Press. 1965. (Preface)
- [Law] Gary Lawlor and Frank Morgan. Paired calibrations applied to soap films, immiscible fluids, and surfaces or networks minimizing other norms. Pacific J. Math. 166 (1994). 55-63. (§10.13)
- [Lev] Mark Levi. A "bicycle wheel" proof of the Gauss-Bonnet theorem. Expo. Math. 12 (1994). 145-164. (§8.0)
- [Lev2] Adam Levy. Energy-minimizing networks meet only in threes. J. Lind\_ math. 22 (1990). 53-59. (§10.12)
- [Loh] J. A. Lohne. Essays on Thomas Harriot. Arch. Hist. Ex. Sci. 20 (1979), 189-312. (§8.7)
- [Mil] John Milnor. Curvatures of left invariant metrics on Lie groups. Adv. Math. 21 (1976), 293-329. (§9.2)
- [Mor1] Frank Morgan. Area minimizing surfaces, faces of Grassmannians, and calibrations. Amer, Math. Monthly 95 (1988). 813-822. (§5.2)
- [Mor2] Frank Morgan. Calculus. planets, and general relativity. SIAM Rev. 34 (Jun. 1992). 295-299. (§7.1)
- [Mor3] Frank Morgan. The double soap bubble conjecture. MAA Focus (Dec. 1995). 6-7.
- [Mor4] Frank Morgan. Geometric Measure Theory: A Beginner's Guide. Third Edition. Boston: Academic Press, 2000. (Preface, Figure §3.3, §5.2, §10.7)
- [Mor6] Frank Morgan. Minimal surfaces, crystals, shortest networks, and undergraduate research. Math. Intelligencer 14 (Summer 1992). 37-44. (§10.11)
- [Mor7] Frank Morgan. Soap bubble clusters. shortest networks, and minimal surfaces. Amer. Math. Soc. video (1991). (§10.11)
- [Mor8] Frank Morgan. Christopher French, and Scott Greenleaf. Wulff clusters in  $\mathbb{R}^2$ . J. Geom. Anal. 8 (1998), 97-115. (§10.7)

- [Mye] S. Myers. Riemannian manifolds with positive mean curvature. Duke Math. J. 8 (1941), 401-404, (§9.6)
- [Nas] J. Nash. The embedding problem for Riemannian manifolds. Ann. Math, (2) 63 (1956), 20-63 (§6.0)
- [Nit] Johannes C. C. Nitsche. Vorlesungen uber iMinimalflächen, New York: springer-Verlag, 1975. Partial translation: Lectures on Minimal Surfaces I. New York: Cambridge University Press, 1989. (Preface)
- [ONE] Barrett O'Neill. Semi. Riemannian Geometry. New York: Academic press, 1983. (§7.2)
- [Pan] Pierre Pansu. Sur la regularite du profil isoperimetrique des surfaces reimanniennes compactes. Ann. Inst. Fourier 48 (1998), 247-264. (§9.12)
- [Pet1] Peter Petersen. Comparison geometry problem list, Riemannian Geometry. Amer. Math. Soc. Providence. 1996, (§9.0)
- [Pet2] Peter Petersen. Riemannian Geometry. Springer. 1998. (Preface. §9.0)
- [Rau] H. E. Rauch. A contribution to Riemannian geometry in the large. Ann. Math. 54 (1951). 38-55. (§9.9)
- [Sch] Richard Schoen. Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature. J. Diff. Geom. 20 (1984), 479-495. (§6.0)
- [Som] D. M. Y. Sommerville, An Introduction to the Geometry of n Dimensions. New York: Dutton & Co., 1929. (§5.2)
- [Spa] Barry Spain. Tensor Calculus. New York: Wiley, 1953. (§7.1)
- [Spi] Michael Spivak. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. Vols. I-V. Houston: Publish or Perish. 1979. (Preface, §8.5, §9.3)
- [Ste1] Jacob Steiner. Aufgaben und Lehrsätze. Crelle's J. 13 (1835), 361-365. (§10.11)
- [Ste2] Jacob Steiner. Über den Punkt der kleinsten Entfernung (1837). Berlin: Gesammelte Werke, 1882. (§10.11)
- [Sto] J. J. Stoker. Differential Geometry. New York.: Wiley-Interscience. 1969. (Preface. Exercise 6.5)
- [Suy] Yoshihiko Suyama. A differentiable sphere theorem by curvature pinching, IITohoku Math. J. 47 (1995). 15-29. (§9.10)
- [Swa] K. J. Swanepoel, Vertex of Steiner minimal trees in  $l_p^d$  and other smooth Minkowski spaces. Dis. Comp. Geom. 21 (1999), 437-447. (§10.15)
- [Tay1] Jean E. Taylor, Crystalline variational problems. Bull. Amer. Math. Soc. 84 (1978), 568-588. (§10.5)
- [Tay2] Jean E. Taylor. Unique structure or solutions to a class of nonelliptic variational problems. Proc. Symp. pure Math. 27 (1975). 419-427, (§10.6)
- [Top] Peter Topping. The isoperimetric inequality on a surface. Manuscripta Math 100 (1999), 23-33. (§9.12)
- [Wec] Brian Wecht, Megan Barber, and Jennifer Tice (1995 Small Geometry Group). Double crystals. Acta Cryst., Sect. A, 56 (2000). 92-95. (§10.7)
- [Wei] Steven Weinberg. Gravitation and Cosmology, New York: Wiley. 1972. (§7.1)
- [Won] Yung-Chow Wong. Differential geometry of Grassmann manifolds. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 57 (1967), 589-594. (§5.2)
- [Wul] G. Wulff, Zur Frage der Geschwindigkeit des Wachstums und der Auflösung der Krystallflächen. Zeitschrift für Krystallographie und Mineralogie 34 (1901). 449-530. (§10.5)

## دليل الرموز

مميّز أويلر	$\chi$
$k$ زمرة قابلة للتفاضل بصورة متواصلة	$C^k$
التغير الأول	$\delta^1$
مقياس	$ds^2$
التطبيق الأسّي	$\text{Exp}_p$
تقوس جاوس	$G$
موتر أينشتاين	$G_j^i$
مقياس ريمان	$g_{ij}$
رموز كريستوفل	$\Gamma_{jk}^i$
منتجة التقوس الوسطي	$\mathbf{H}$
التقوس الوسطي القياسي	$H$
الشكل الأساسي الثاني	$\mathbf{II}$
الموتر الأساسي الثاني	



التقوس المقطعي	$K$
متجة التقوس	$\kappa$
التقوس القياسي $1,  \kappa $	$\kappa$
التقوس الرئيس	
متجة تقوس الجيوديسي	$\kappa_g$
متجهات $m$	$\wedge_g \mathbb{R}^n$
ناظمي الوحدة	$\mathbf{n}$
تطبيق جاوس	
معيار	$\Phi$
التقوس القياسي	$R$
موتر تقوس ريمان	$R^i_{jkl}$
تقوس ريتشي Ric	$R_{j1}$
الزمرة المتعامدة	$SO(n)$
مماس الوحدة	$\mathbf{T}$
الوقت الفعلي	$\tau$
الفضاء المماسي	$T_P S$
السرعة	$\mathbf{v}$
المستوي المولّد من $v$ و $w$	$v \wedge w$
الموقع	$\mathbf{x}$

المشتق الجزئي $\partial \mathbf{x} / \partial u^i$	$\mathbf{x}_i$
مشتق الزمن $d\mathbf{x} / dt$	$\dot{\mathbf{x}}$
مركبات حقل المتجة	$X'$
المشتق المتغاير	$X'_{ij}$



## دليل الأسماء

Scherk, H.	شيرك، ه.	Almgren, F.	ألمغرن، ف.
Chern, S.	شيرن، س.	Einstein, A.	أينشتاين، أ.
Gromov, M.	غروموف، م.	Euclid,	إقليدس
Vu, P.	فو، ب.	Euler, L.	أويلر، ل.
Callahan, M.	كالاهان، م.	Underwood, A.	أندروود، أ.
Conger, M.	كونغر، م.	Enneper, A.	أنيبير، أ.
Kepler, J.	كيبلر، ج.	Banner, A.	بانر، أ.
Klingenberg, W.	كلينجنبيرغ، و.	Berger, M.	برغير، م.
Kusner, R.	كوسنر، ر.	Bonnet, P. O.	بونيه، ب.
Collins, C.	كولينز، س.	Bredt, J.	بردت، ج.
Levy, A.	ليفى، أ.	Brieskorn, E.	بريسكورن
Lorentz, H.	لورنتز، ه.	Peters, K.	بيتز، ك.
Mattuck, A.	ماتوك، أ.	Playfair, J.	بلاي فير، ج.
McMath, D.	ماكماث، د.	Bodden, I.	بودن، ي.
Mcusnier, J.	ماكوسنيير، ج.	Taylor, J.	تايلور، ج.
Michelson, A.	مايكلسون، أ.	Tromba, A.	ترومبا، أ.
Morgan, F.	مورغان، ف.	Toponogov, V.	توبونوجوف، ف.



Morgan, B.	مورغان، ب.	Gauss, C. F.	جاوس، س. ف.
Morley, E.	مورلي، ي.	Jeffery, G.	جيفري، ج. ب.
Munson, B.	منسون، ب.	Jones, F.	جونز، ف.
Murdoch, T.	ميردوش، ت.	Dill, H.	ديل، ه.
Myers, S.	مايرز، س.	Rauch, H.	روش، ه.
Newton, I.	نيوتن، ي.	Riker, M.	ريكر، م.
Harriot, T.	هارriot، ت.	Robb, D.	روب، د.
Hilderbrandt, S.	هيلدبراندت، س.	Smale, S.	سميل، س.
Hoffman, D.	هوفمان، د.	Sullivan, J.	سوليفان، ج.
Hoffman, J.	هوفمان، ج.	Siegel, P.	سيجل، ب.
Wasserman, I.	واسيرمان، ي.	Selemeyer, C.	سيليمير، س.
Witte, D.	ويت، د.	Sengupta, A.	سينجوبتا، أ.
		Scheon, R.	شوين، ر.

## ثبت المصطلحات

أولاً: عربي - إنجليزي

### أ

Principal directions	اتجاهات رئيسة
Crystals	البلورات
Torsion	التواء
Bending	انحناء
Parallel transport	انتقال متواز
Moth	أنيموث
Coordinates,	إحداثيات
Normal coordinates	إحداثيات ناظرية
Projection	إسقاط
Cylinder	أسطوانة

### ب

Salt crystals,	بلورات الملح
----------------	--------------

### ت

Gauss map	تطبيق جاوس
Variation	تغير
Curvature,	تقوس
Gauss curvature	تقوس جاوس

Ricci curvature	تَقْوَس ريتشي
Principal curvature	تَقْوَس رئيس
Scalar curvature	تَقْوَس قياسي
Sectional curvature	تَقْوَس مَقْطَعي
Curvature of curves	تَقْوَس منحنى
Mean curvature	تَقْوَس وَسْطِي
Complete	تام
Exponential map	تطبيق أسي
Weingarten map	تطبيق ينغارتن
Ricci's lemma	تم هيدية ريتشي
ث	
Black hole	ثقب أسود
ج	
Gravity	جاذبية
Geodesics	جَيوديسي
Wedge product	جداء ويدج
ح	
Computer	حاسب
Volume	حجم
Jacobi field	حقل جاكوبي
خ	
Extrinsic,	خارجي
Boston's latitude	خط عرض بوسطن
د	
Intrinsic	داخلي
Osculating circle	دائرة مُلاصقة

## ر

Graph

رَسَم

Christoffel symbols

رموز كريستوفل

## ز

Orthogonal group

زُمرة مُتعامدة

Angles between planes

زاوية محصورة بين مستويين

## س

Scherk's surface

سَطْح شاك

Surfaces

سَطْح

Minimal surfaces

سَطْح متناهي الصغر

Enneper's surface

سَطْح أنيبير

Surface of revolution

سَطْح دوراني

Catenoid

سِلْسِلِي الشَّكْلِ

Costa's surface

سطح كوستا

## ش

Slice

شَرِيحَة

Networks

شَبَكَات

Pinching

شَطِيرَة

Schwarzschild

شفارتشيلد

First fundamental form

شكل أساسي أول

Second fundamental form

شكل أساسي ثاني

Wulff shape

شكل ولف

## ص

Connection

صِلَة

Euler's formula

صيغة أويلر

## ض

Pressure	ضغَط
----------	------

## ط

Torus	طارة
Length	طول
Arc length	طول القوس

## ع

Double clusters	عُنُقُودِيَّةٌ مُضَاعَفَةٌ
Mercury	عطارد

## ف

Tangent space	فَضَاءُ الظِّل
Projective space	فضاء إسقاطي
Complex projective space	فضاء مركب إسقاطي
Soap films	فلم الصابون
Hypersurfaces	فوق سطح

## ق

Poincare disc	قُرْص بوانكاريه
Diameter	قُطْر
Chain rule	قاعدة التسلسل

## ك

Sphere	كُرة
Berger sphere	كُرة برغير

## ل

Laplacian	لابلاس
-----------	--------

Helix	لَوَلَب
م	
Cone	مُخروط
Steiner problem	مَسْأَلَةُ شتاينر
Yamabe problem	مَسْأَلَةُ يامبي
Metric	مَقاس ، متري
Lorentz metric	مَقاس لورنتز
Gauss-Bonnet formula	مُبرهنة جاوس وبونيه
Multi-vectors	مُتعدد المتجهات
Simple vector	مُتجه بسيط
Decomposable vector	مُتجه قابل للتفريق
Ricci's identity	مُتطابقة ريتشي
Symmetries	مُتناظر
Geodesics triangle	مُثلث جيوديسي
Spherical trigonometry	مُثلثات كروية
Ellipsoid	مُجسم قطع ناقص
Helicoid	مُجسم لولبي
Covariant derivative	مُشتقة مُتغايرة
Covariant	مُوافق التغير
Einstein tensor	مُوتر أينشتاين
Riemannian curvature tensor	مُوتر تقوس ريمان
Second fundamental tensor	مُوتر أساسي ثاني
Norms	مِعيار
Convex norm	مِعيار مُحدب
Precession	مبادرة (حركة)
Strake	مباشرة
Equivalence principle	مبدأ التكافؤ
Stokes's Theorem	مبرهنة ستوكس
Curvature vector	متجه التقوس

Curvature vector	متجة التقوس
Mean curvature vector	متجة التقوس الوَسْطِي
Tangent vector	متجة مماس
Bianchi's first identity	متطابقة بيانكي الأولى
Electron microscope	ميكروسكوب إلكتروني
Contravariant	مخالف التغير
Smokestack	مدخنة
Area, and Gauss Curvature	مساحة وتَقْوُسْ جاوس
Isoperimetric problem	مسألة المحيطات المتساوية
Fermat problem	مسألة فيرما
Minimal surface equation	معادلة سَطْح متناهي الصغر
Calibration	معايرة
Schwartz summarization	ملخص شوارز
Euler characteristic	مميز أويلر
Curves; see also curvature of curves,	منحنيات
Gradient	ميل

## ن

Normal	نَاطِمي ، طَبِيعِي
Conjugate points	نُقْطَتَان مُتْرَافِقَتَان
Special relativity	نسبية خاصة
General relativity	نسبية عامة
Infectivity radius	نصف قطر التباين
Nash Embedding Theorem	نظرية الطمر (التضمين) لناش
Maximal diameter Theorem	نظرية القطر الأعظمية
Geometric measure theory	نظرية القياس الهندسي
Bonnet's Theorem	نظرية بونيه
Bishop's Theorem	نظرية بيشوب
Gauss-Bonnet-Chern Theorem	نظرية جاوس وبونيه وتشرن
Gauss's Theorem Egregium	نظرية جاوس إغريغوم (الباهرة)

Sphere Theorem	نظرية كُرّة
Topogonov Comparison Theorem	نظرية مُقارَنَة توبونوجوف
Rauch Comparison Theorem	نظرية مُقارَنَة روش
Hopf-Rinow Theorem	نظرية هوف رينو
Cut points	نقطة فاصلة
Pendulum	نَوَّاس (بندول)

## هـ

Lunes	هلال
Hyperbolic Geometry	هَنْدَسَة زَائِدِيَة
Non-Euclidean geometry	هَنْدَسَة لَا إِقْلِيدِيَة
Geometry	هَنْدَسَة

## و

Proper time	وقت فِعْلِي
-------------	-------------



## ثانياً: إنجليزي – عربي

## A

Angles between planes

الزاوية المحصورة بين مستويين

Arc length

طول القوس

Area, and Gauss Curvature

المساحة، و تقوس جاوس

## B

Bending

انحناء

Berger sphere

كرة برغير

Bianchi's first identity

المتطابقة الأولى لبليانكي

Bishop's Theorem

نظرية بيشوب

Black hole

ثقب أسود

Bonnet's Theorem

نظرية بونيه

Boston's latitude

خط عرض بوسطن

## C

Calibration

معايرة

Catenoid

سلسلي الشكل

Chain rule

قاعدة التسلسل

Christoffel symbols

رموز كريستوفل

Comparison Theorem of Rauch

نظرية مقارنة روش

Complete

تام

Computer

حاسب

Cone

مخروط

Conjugate points

نقطتان مترافقتان

and sectional curvature

وتقوس مقطعي

and shortest geodesics

وجيوديسي الأقصر

Complex projective space

فضاء مركب إسقاطي

Connection

صلة

Contravariant

مخالف التغير

Convex norm

معياري محدب

Coordinates,

إحداثيات

Normal	نَاظِمِي
Costa's surface	سطح كوستا
Covariant	مُوافِق التَغْيَر
Covariant derivative	مُشتقة مُتغَايِرَة
along curve	على طول المنحنى
Crystals	البلورات
Curvature,	تَقْوَس
see also curves,	الْمُنْحَنِيَّات
Gauss Curvature,	تَقْوَس جاوس
Mean curvature,	تَقْوَس وَسَطِي
Principle curvature,	تَقْوَس رِئِيس
Ricci curvature,	تَقْوَس رِيْتشِي
Scalar curvature,	تَقْوَس قِيَّاسِي
Sectional curvature	تَقْوَس مَقْطَعِي
Curvature of curves	تَقْوَس مَنَحْنِي
generalized $D^2\Phi(\kappa)$	مُعَمَّم $D^2\Phi(\kappa)$
geodesic $\kappa_g$	جَيُودِيسِي $\kappa_g$
polar coordinates	إِحْدَاثِيَّات قُطْبِيَّة
radius of	نِصْف قُطْر
Curvature vector $\kappa$ of curve	مَتَجَة التَقْوَس $\kappa$ لِلْمَنَحْنِي
Curves; see also curvature of curves,	الْمُنْحَنِيَّات
Geodesics	جَيُودِيسِي
Curvature vector $\kappa$ ,	مَتَجَة التَقْوَس $\kappa$
Isoperimetric	مُتَسَاوِي المَحِيط
Normal vector $n$	مُتَجَهَّات نَاظِمِي $n$
Tangent vector $T$	مَتَجَة مَمَّاس $T$
Cut points	النقطة الفاصلة
Cylinder	أُسْطُوَانَة

**D**Decomposable  $m$  - vector

مُتَجَة قابل للتفريق

Diameter

قُطر

Bonnet's Theorem

نظرية بونيه

Myers's Theorem

نظرية مايرز

Double clusters

عُنُقُودِيَّة مُضاعفة

**E**Einstein tensor  $G_j^i$ مُوتَر أينشتاين  $G_j^i$ 

Electron microscope

ميكروسكوب إلكتروني

Ellipsoid

مُجَسَّم قطع ناقص

Enneper's surface

سَطْح أنيبير

Equivalence principle

مبدأ التكافؤ

Euler characteristic  $\chi$ مميز أويلر  $\chi$ 

Euler's formula

صيغة أويلر

Exponential map  $\text{Exp}_p$   
and sectional curvatureتطبيق أسّي  $\text{Exp}_p$ 

نَقُوس مَقْطَعي

Extrinsic,

خارجي

**F**

Fermat problem

مسألة فيرما

First fundamental form

الشكل الأساسي الأول

**G**

Gauss-Bonnet formula

مُبرهنة جاوس وبونيه

Proof in  $\mathbb{R}^3$ برهان  $\mathbb{R}^3$ 

Gauss-Bonnet-Chern Theorem

نظرية جاوس وبونيه وتشرن

Gauss curvature  $G$ نَقُوس جاوس  $G$ 

and area

مَسَاحَة

constant

ثَابِت

of geodesic triangle

مُثَلَّث جُيُوديسي

of hypersurface

فوق سطح

in local coordinates

إحداثيات محلية

in orthogonal coordinates	إحداثيات متعامدة
and parallel transport	انتقال متواز
of projections	إسقاط
Gauss map $n$	تطبيق جاوس $n$
Gauss's Theorem Egregium	نظرية جوس إغريغوم (الباهرة)
General relativity	النسبية العامة
Geodesics triangle	مثلث جيوديسي
Geodesics	جيوديسي
converge for positive curvature	يتقارب إلى تقوس موجب
existence and uniqueness	الوحدانية والوجود
formula for	صيغة
hyperbolic space	الفضاء الزائدي
relativity	النسبية
sphere	كرة
Geometric measure theory	نظرية القياس الهندسي
Geometry	الهندسة
bounded	محدود
global	عمومي
Riemannian	ريمان
Gradient	ميل
Graph	رسم
curve	منحنى
surface	سطح
Gravity	جاذبية

## H

Helicoid	مجسم لولبي
with handle	مع مقبض
Helix	لولب
Hopf-Rinow Theorem	نظرية هوف رينو

Hyperbolic Geometry	هندسة زائدية
Hypersurfaces	فوق سطح
<b>I</b>	
Infectivity radius	نصف قطر التباين
Intrinsic	داخلي
Isoperimetric problem	مسألة المحيطات المتساوية
<b>J</b>	
Jacobi field	حقل جاكوبي
<b>L</b>	
Laplacian	لابلاس
Length	طول
Lorentz metric	مقاس لورنتز
Lunes	هلال
<b>M</b>	
Maximal diameter Theorem	نظرية القطر الأعظمية
Mean curvature $H$	تقوس وسطي $H$
Mean curvature vector $\mathbf{H}$	متجه التقوس الوسطي $\mathbf{H}$
Mercury	عطارد
Metric $ds^2 = g_{ij} du^i du^j$	مقاس ، متري $ds^2 = g_{ij} du^i du^j$
to first order	إلى الرتبة الأولى
Lorentz	لورنتز
Schwarzschild	شفارتسشيلد
Minimal surface equation	معادلة سطح متناهي الصغر
Minimal surfaces	سطح متناهي الصغر
Moth	أنثيموث
Multi-vectors	متعدد المتجهات
<b>N</b>	
Nash Embedding Theorem	نظرية الطمر (التضمين) لناش
Networks	الشبكات
Non-Euclidean geometry	هندسة لاإقليدية

Normal coordinates	إحداثيات ناظمية
Normal $\mathbf{n}$	ناظمي ، طبيعي $\mathbf{n}$
to curves	للمنحني
to hypersurface	للفوق سطح
to surface	للسطح
Norms	معيار
crystalline	البلوري
first variation	التغير الأول
Manhattan	مانهاتن
Rectilinear	مُسْتَقِيمِي
<b>O</b>	
Orthogonal group $SO(n)$	زُمرة مُتعامدة $SO(n)$
Osculating circle	دائرة مُلاصقة
<b>P</b>	
Parallel transport	انتقال متواز
and second variation	والتغير الثاني
Pendulum	نَوَّاس (بندول)
Pinching	الشطيرة
Poincare disc	قُرْص بوانكاريه
Precession	مبادرة (حركة)
Pressure	ضغط
Principal curvature	تَقْوَس رئيس
Principal directions	اتجاهات رئيسة
Projection	إسقاط
Projective space	فضاء إسقاطي
Proper time $\tau$	الوقت الفعلي $\tau$
<b>R</b>	
Rauch Comparison Theorem	نظرية مُقارَنة روش
Ricci curvature	تَقْوَس ريتشي
Myers's Theorem	نظرية مايرز

sign	إشارة
Ricci's identity	مُتطابِقة ريتشي
Ricci's lemma	تم هيدية ريتشي
Riemannian curvature tensor	مُوتر تقوس ريمان
and inequality of mixed partials,	وُمُتباينة جزئية مختلطة
and parallel transport	وانتقال متواز
sign	إشارة
<b>S</b>	
Salt crystals,	بلورات الملح
Scalar curvature $R$	تقوس قياسي $R$
of product	الجداء
and volume	الحجم
Scherk's surface	سَطْح شاك
Schwartz summarization	ملخص شوارز
Schwarzschild	شفارتسشيلد
metric	مَقاس (مترى)
radius	نصف القطر
Second fundamental form <b>II</b>	الشكل الأساسي الثاني <b>II</b>
Second fundamental tensor <b>II</b>	مُوتر أساسي ثاني
Sectional curvature	تقوس مَقْطَعي
Bonnet's Theorem	نظرية بونيه
conjugate points	نُقْطَتَان مُتَرافِقَتَان
constant	ثابت
diameter	قُطر
exponential map	تطبيق أسي
of projections	إسقاط
Rauch Comparison Theorem	نظرية مُقارَنة روش
Sphere Theorem	نظرية كُرة
weighted average of axis curvatures	مُتوسط موزون لمحور التقوسات
Simple $m$ - vector	مُتَجهة - $m$ بسيط

Slice	شريحة
Smokestack	مدخنة
Soap films	فلم الصابون
Special relativity	النسبية الخاصة
Sphere	كرة
Hypersphere	فوق كرة
Sphere Theorem	نظرية كرة
Spherical trigonometry	مثلثات كروية
Steiner problem	مسألة شتاينر
Stokes's Theorem	مبرهنة ستوكس
Strake	مباشر
Surface of revolution	سطح دوراني
Surfaces	سطح
in $\mathbb{R}^3$	في $\mathbb{R}^3$
in $\mathbb{R}^n$	في $\mathbb{R}^n$
Symmetries	متناظر

## T

Tangent space $T_p S$	فضاء الظل $T_p S$
Tangent vector $T$ to curve	متجهة مماس $T$ للمنحنى
Topogonov Comparison Theorem	نظرية مقارنة توبونوجوف
Torsion	التواء
Torus	طارة

## V

Variation	تغير
of curve	للمنحنى
second of curve	الثاني للمنحنى
of surface	للسطح
Volume	حجم
and scalar curvature	وتقوس قياسي



W

Wedge product

جداء ويدج

Weingarten map  $D_{\mathbf{n}}$

تطبيق ينغارتن  $D_{\mathbf{n}}$

Wulff shape

شكل ولف

Y

Yamabe problem

مَسْأَلَة يامبي

## كشاف الموضوعات

### أ

أسطوانة، ٢٣، ٢٤، ٩٨  
إسقاط، ٤٠، ٤٨، ٦٠، ١٢٤

### ب

بلورات الملح، ١٢١  
البلورات، ١١٥  
البلوري، ١٢٦

### ت

تام، ١٠١  
تطبيق ينغارتن، ٩٢  
التغير الأول، ١٤، ٣٠، ٣٦

### ج

حجم، ٥٥، ١١١

### خ

خارجي، ٦٠  
خط عرض بوسطن، ٩٨

### د

داخلي، ٢، ٣، ٢٢، ٣٣، ٥١، ٥٣، ٥٦، ٦٠،  
٨٧، ٩٣

### ر

رموز كريستوفل، ٥٣، ٦٣، ٦٧، ٦٨، ٦٩،  
٧٥

### س

سطح كوستا، ١٨

### ش

شبكات، ١٢٦، ١٢٧، ١٢٨  
شفارتسشيلد، ٧٤، ٧٧، ٨٥  
شكل ولف، ١٢٠، ١٢١، ١٢٢، ١٢٤

### ص

صيغة أويلر، ١٣  
صيغة، ١٣، ١٥، ٤٨، ٥١، ٥٥، ٥٦، ٥٧،  
٦٠، ٦٢، ٦٩، ٧٣، ٨٣، ٨٤، ٨٧، ٩٠،  
٩٤، ٩٥، ٩٦، ٩٧، ٩٩، ١١٤

**ط**

طارة، ٦٦

طول القوس، ٥، ٧، ١٧، ٦١، ٨١، ١١٩

طول، ١، ٥، ٦، ٧، ٨، ١٤، ١٧، ٢٥، ٢٦،

٤٨، ٦١، ٦٥، ٦٦، ٧٤، ٨١، ٩١، ٩٤،

٩٨، ٩٩، ١٠١، ١٠٢، ١٠٣، ١٠٧،

١١٣، ١١٤، ١١٩، ١٢١، ١٢٥، ١٢٨

مسألة فيرما، ١٢٦

معايرة، ١٢٧

ملخص شوارز، ١٢٠

منحنى، ٦، ١١، ٢٩، ٣٥، ٦٠، ٦٢، ٦٩،

٩٤، ٩٥، ١٠٣، ١١٠، ١١٣، ١١٤،

١١٥، ١١٨، ١٢٠، ١٢١، ١٢٦،

منحنيات، ٥

**ن**

النسبية، ١، ٧١، ٧٢، ٧٣، ٧٤، ٧٧، ٨٢،

٨٣، ٨٤

نصف قطر التباين، ١٠٩

نصف قطر، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٥، ١٩، ٢٣،

٢٥، ٢٦، ٢٧، ٤٥، ٤٧، ٤٩، ٥٥، ٦٧،

٦٨، ٧٤، ٧٧، ٨٤، ٨٥، ٩٨، ١٠٧،

١٠٩

نظرية القطر الأعظمية، ١١٢

نظرية القياس الهندسي، ١٢٠

نظرية مايرز، ١١١

نظرية هوف رينو، ١٠٣

**ع**

عطارد، ١، ٧١، ٧٢، ٧٧، ٧٨، ٨٠

على طول المنحنى، ١٦، ٦٢، ٩٤، ٩٧،

١٠٤

**ف**

الفضاء الزائدي، ٦٥

**ل**

للسطح، ٢، ١٤، ٢٥، ٢٩، ٣٠، ٣٥، ٣٩،

٤٠، ٤٨، ٥١، ٥٣

للمنحنى، ٥، ٢٧، ٣٥، ١٢٥

لورنتز، ٧٣، ٧٤، ٧٦، ٧٧

**م**

مبدأ التكافؤ، ٧٢، ٧٤

مدخنة، ٧